Ueber Kurven und Flächen, welche sich aus geradlinigen Flächen 2. Grades durch gemeinsame Lote zwischen den Erzeugenden ableiten lassen.

Inaugural-Dissertation,

welche

nebst den beigefügten Thesen

mit Genehmigung der hohen

philosophischen Fakultät der Königl. Universität Breslau

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

am Donnerstag, den 9. März 1905, mittags 12 Uhr

in der Aula Leopoldina

öffentlich verteidigen wird

Albert Krusche.

ACAD. LUGD BAT. BIBL.

Opponenten:

Herr Drd. **Gerhard Müth,**

Herr cand. phil. **Otto Poganka.**

Breslau
Buchdruckerei H. Fleischmann
1905.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543101_0098

Dem Andenken meines Vaters.

I. Das einmantelige Hyperboloid.

§ 1.

1. Es sei als allgemeine Fläche 2. Grades mit reellen Geraden das einmantelige Hyperboloid vorliegend mit den beiden Regelscharen G und L. Aus der G-Schar nimmt man eine feste Gerade g_0 und eine bewegliche g und konstruirt zwischen ihnen das kürzeste Lot. Lässt man nun die g die ganze Regelschar G durchlaufen, während man in jeder ihrer Lagen das kürzeste Lot herstellt zwischen ihr und der g_0, so fallen alle diese Lote in die Ebenen des Ebenenbüschels g_0. Dasselbe ist eindeutig auf die G-Schar bezogen. Denn einer beliebigen Geraden g_i der Regelschar entspricht nur eine Ebene des Büschels g_0, nämlich diejenige, welche senkrecht ist zu der Ebene durch g_0 parallel zu der g_i. Andererseits gehört zu jeder Ebene ξ des Büschels wiederum nur eine Gerade der G-Schar; dieselbe ist parallel zu der auf ξ senkrechten Ebene des Büschels g_0. Es liegt somit ein Ebenenbüschel und eine Regelschar vor, die eindeutig aufeinander bezogen sind. Dabei kann man die Regelschar als das Erzeugnis zweier projektiver Ebenenbüschel ansehen. Statt also nach dem Erzeugnis einer Regelschar und eines zu ihm projektiven Ebenenbüschels zu fragen, dessen Achse eine Gerade der Regelschar ist, kann man das Erzeugnis dreier projektiver Ebenenbüschel aufsuchen, bei denen die Achse des einen in zwei entsprechenden Ebenen der beiden andern gelegen ist. Drei projektive Ebenenbüschel in allgemeiner Lage erzeugen eine kubische Raumkurve. In dem vorliegenden Falle gehört aber die Gerade g_0 ebenfalls zu dem Erzeugnis als Schnitt

dreier entsprechender Ebenen der Büschel; denn g_0 liegt zunächst in den entsprechenden Ebenen zweier Büschel, und da sie Achse des dritten ist, so werden diese Ebenen von ihrer entsprechenden im dritten Büschel in g_0 geschnitten. Es spaltet sich demnach von der kubischen Raumkurve die g_0 ab, und es bleibt als eigentliches Erzeugnis ein Kegelschnitt. Somit ergibt sich:

Die Fusspunkte, welche die kürzesten Lote zwischen einer festen Geraden einer Regelschar und den übrigen Geraden auf den letzteren besitzen, erzeugen einen Kegelschnitt.

2. Der Fusspunktkegelschnitt Φ_0^2, welcher der Erzeugenden g_0 zugeordnet ist, ist ein eigentlicher Kegelschnitt, der nicht weiter zerfällt. Projiziert man denselben in der Richtung der g_0 auf eine Ebene E, die zu g_0 senkrecht ist, so werden die beiden zu einander parallelen Erzeugenden g_0 und l_0 in die Punkte G_0 und L_0 projiziert. Dabei geht der Ebenenbüschel um g_0 in einen Strahlenbüschel mit dem Scheitel G_0 über. Die l_0 wird von allen Geraden der G-Schar getroffen. Durch die Projektion in der Richtung der g_0 entsteht, da alle übrigen g sich wiederum in Geraden projizieren, um L_0 ein zweites Strahlenbüschel in der Ebene E. Ist nun g_i eine beliebige Gerade auf dem Hyperboloid und auf ihr der Punkt P Fusspunkt des gemeinsamen Lotes p zwischen g_0 und g_i, so findet man die Projektion von P, indem man durch P die Parallele t zu g_0 zieht. Die Ebene (g_i, l_0) enthält alsdann alle Geraden, welche die g_i treffen und zu l_0 parallel sind. Mithin ist in dieser Ebene auch die Gerade t gelegen. Nun ist aber $p \perp g_0$ und $p \perp g_i$ als gemeinsames Lot zwischen g_0 und g_i, und weil $t \parallel g_0$ ist, so ist auch $p \perp t$. Da also p auf zwei Geraden der Ebene (g_i, l_0) senkrecht ist, so ist $p \perp (g_i, l_0)$. Weil p zu E parallel ist, so projiziert sich der rechte Winkel (p, g_i) wiederum in einen rechten Winkel, dessen Schenkel bezw. durch G_0 und L_0 gehen. Dasselbe gilt für jedes weitere Lot. Mithin entstehen in der Ebene E zwei Strahlenbüschel G_0 und L_0, in denen je zwei entsprechende Strahlen zu einander normal sind. Ihr Erzeugnis ist daher ein Kreis. Da also

der Cylinder, welcher den Kegelschnitt Φ_0^2 parallel zu der g_0 projiziert, von einer zu seinen Kanten senkrechten Ebene in einem Kreise geschnitteu wird, so erkennen wir ihn als Rotationscylinder, welcher mit dem Hyperboloid den Φ_0^2 und das Geradenpaar g_0, l_0 gemeinsam hat. Es hat sich somit ergeben:

Die Projektion eines Fusspunktkegelschnitts in der Richtung der zugehörigen Erzeugenden ist ein Kreis, dessen Durchmesser der Abstand dieser Erzeugenden von der zu ihr parallelen ist.

§ 2.

3. Einer Geraden g_0 ist ein Kegelschnitt Φ_0^2 zugeordnet als Ort der Fusspunkte, welche die kürzesten Lote zwischen der g_0 und den übrigen g auf diesen letzteren besitzen. In welchem Punkte begegnet nun die g_0 ihrem Kegelschnitt? Auf der Geraden g_0 besteht eine Involution, und zwar sind in ihr je zwei Punkte gepaart, in denen zwei zu einander normale Ebenen die Fläche berühren. Zentralpunkt dieser Involution ist derjenige Punkt, in welchem die zur asymptotischen Berührungsebene senkrechte Ebene die Fläche tangiert. Dieser Zentralpunkt, behaupte ich, ist der Begegnungspunkt von g_0 und Φ_0^2. Der Schnittpunkt der g_0 mit ihrem Kegelschnitt ist ja Fusspunkt des kürzesten Lotes zwischen der g_0 und sich selbst. Man hat also dieses Lot als die Grenzlage des kürzesten Lotes P_0 P_1 zwischen g_0 und der unendlich nahen Erzeugenden g_1 zu betrachten, wenn beide Geraden dem Zusammenfallen sich unbegrenzt nähern. Dabei findet eine Annäherung des P_1 auf P_0 P_1 an P_0 heran statt, bis es auf der Grenze in diesen zu liegen kommt. Nun ist aber P_0 als Fusspunkt des gemeinsamen Lotes zwischen g_0 und der Nachbarerzeugenden Zentralpunkt der Involution auf g_0. Da somit der Zentralpunkt selbst zu den Punkten des Φ_0^2 gehört, so muss diese Kurve notwendig durch ihn hindurchgehen:

Der Zentralpunkt der Involution auf g_0 ist der Begegnungspunkt dieser Geraden mit ihrem Kegelschnitt Φ_0^2.

4. Es entsteht nun die Frage, ob jeder Punkt der g_0 nur für ein einziges Lot Fusspunkt ist oder ob mehrere Lote von ihm ausgehen. Dazu betrachtet man einen Punkt P auf g_0. Da die von ihm ausgehenden Lote auf g_0 in P normal sind, so liegen sie sämtlich in der Ebene π, welche in P auf g_0 senkrecht steht. Ausserdem sollen alle diese Lote auf Geraden der G-Schar senkrecht sein. Man fälle also von P auf die Geraden g die Lote. Die Fusspunkte derselben bilden eine Raumkurve 4. Ordnung 2. Art[1]), und die Lote sind daher die Erzeugenden eines Kegels 4. Ordnung. Da die Lote aus P auf die g_0 einen Strahlenbüschel in der Ebene π erfüllen, so zweigt sich dieser von dem Kegel ab und erniedrigt dadurch die Ordnung desselben auf die dritte. Bei der Abzweigung der Ebene π von dem Kegel bleibt in dem Kontinuum ein Strahl des Büschels auf dem Kegel 3. Ordnung. Obwohl dieser Strahl zugleich auf dem Kegel und in der Ebene π liegt, so ist er doch in unserer Betrachtung nicht verwendbar, da er kein gemeinsames Lot ist. Es bestehen also nur die beiden übrigen Schnitte der π mit dem Kegel als die gesuchten Lote, so dass man das Ergebnis hat:

Von jedem Punkte der g_0 gehen zwei gemeinsame Lote nach Geraden der G-Schar aus.

5. Da jeder Punkt der g_0 für zwei Lote Fusspunkt ist, so kann man dieselben ansehen als Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier Punktreihen, welche in einer Korrespondenz (1,2) stehen. Die Träger der beiden Punktreihen sind die g_0 und die unendlich ferne Gerade s_0 der zu g_0 normalen Ebene. Von jedem Punkte der g_0 gehen zwei Geraden aus, und die Punkte auf s_0, nach denen sie gehen, sind die ihm entsprechenden. Anderseits entspricht jedem Punkte der s_0 immer nur ein Punkt der g_0. Das lässt sich in folgender Weise zeigen. Da s_0 die absolute Polare des unendlich fernen Punktes $\mathfrak{G}_0$ von g_0 ist, so geht die absolute Polare irgend eines Punktes X von s_0 durch $\mathfrak{G}_0$ und trifft

[1]) Sturm, Math. Annalen, Bd. 6, Seite 252.

den unendlich fernen Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2$ des Hyperboloids noch in dem Punkte $\mathfrak{G}_i$. Wenn die Gerade g_i der Fläche durch diesen Punkt geht, so ist das kürzeste Lot zwischen g_0 und g_i das einzige nach X gehende, und es entspricht also dem Punkte X nur der Punkt auf g_0, in dem g_0 von dem Lote durch X getroffen wird. Damit ist die Korrespondenz (1,2) zwischen g_0 und s_0 erkannt, und als solche ist sie eine Projektivität zwischen der Punktreihe auf g_0 und einer Involution auf s_0. Die letztere wird gebildet durch die Punktepaare, die demselben Punkte auf g_0 entsprechen. Geht man von einem Punkte P von g_0 aus, so findet man die beiden ihm entsprechenden in folgender Weise: Von P mögen die Lote p' und p'' ausgehen nach den Geraden g' bezw. g''. Da $p' \perp g'$ und $p'' \perp g''$ ist, so sind die unendlich fernen Punkte der Geraden jedes dieser Paare konjugiert in Bezug auf die absolute Kurve $\mathfrak{K}^2$, d. h. $\mathfrak{P}'$ liegt auf der absoluten Polare von $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{P}''$ auf derjenigen von $\mathfrak{G}''$. Somit werden die einem Punkte P von g_0 entsprechenden Punkte in die s_0 eingeschnitten durch die absoluten Polaren der unendlich fernen Punkte von denjenigen g, auf denen die Lote aus P senkrecht sind.

Alle Lote der g_0 liegen in dem Ebenenbüschel um g_0, dessen Ebenen nach den Punkten der s_0 gehen. Da dieses Ebenenbüschel die Involution auf s_0 projiziert, so ist es ein involutorisches Ebenenbüschel; in ihm sind die Ebenen gepaart, welche g_0 je mit den beiden von einem Punkte der g_0 ausgehenden Lote verbinden. Zu den Ebenenpaaren der Involution gehören auch die beiden Ebenen, welche die absolute Kurve $\mathfrak{K}^2$ tangieren, da in ihnen die Tangenten aus $\mathfrak{G}_0$ an den $\mathfrak{K}^2$ liegen. Dass diese Tangenten gemeinsame Lote zwischen der g_0 und je einer weiteren g sind, lässt sich folgendermassen zeigen. Die Tangenten aus $\mathfrak{G}_0$ an $\mathfrak{K}^2$ seien t und t_1, und sie mögen die Kurve in $\mathfrak{T}$ bezw. $\mathfrak{T}_1$ berühren. Alsdann ist $\mathfrak{T}\,\mathfrak{T}_1$ die absolute Polare von $\mathfrak{G}_0$. Da wir bereits die s_0 als diese Polare erkannt haben, so folgt daraus die Identität von s_0 mit $\mathfrak{T}\,\mathfrak{T}_1$. Mithin sind $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_1$ die Schnittpunkte der s_0 mit $\mathfrak{K}^2$. Die Tangente t schneidet den un-

endlich fernen Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2$ des Hyperboloids ausser in $\mathfrak{G}_0$ noch in $\mathfrak{G}_i$. Da $\mathfrak{G}_i$ auf der absoluten Polare von $\mathfrak{T}$ liegt, so ist $\mathfrak{G}_i$ zu $\mathfrak{T}$ konjugiert in Bezug auf $\mathfrak{K}^2$, d. h. es ist $t \perp g_i$, wo g_i die Erzeugende ist, welche den $\mathfrak{G}_i$ zum unendlich fernen Punkte hat. Ferner ist $\mathfrak{G}_0$ konjugiert zu $\mathfrak{T}$ in Bezug auf $\mathfrak{K}^2$, da jeder dieser Punkte auf der Polare des andern liegt; also ist auch $t \perp g_0$: Somit ist die Tangente t aus $\mathfrak{G}_0$ an die absolute Kurve gemeinsames Lot zwischen g_0 und g_i, und ähnliches gilt für die andere Tangente t_1. Da also die Tangenten aus $\mathfrak{G}_0$ an die absolute Kurve zu den kürzesten Loten von g_0 gehören, so bilden die Tangentialebenen aus g_0 an $\mathfrak{K}^2$ ein Paar des inovolutorischen Ebenenbüschels g_0. Diese beiden gepaarten Elemente sind konjugiert-imaginär, und wir haben es also mit einer positiven Potenz der Involution zu tun: die Involution ist hyperbolisch, d. h. sie besitzt reelle Doppelebenen. Nun sind aber die Doppelebenen der Involution harmonisch zu jedem Paare derselben, also auch zu dem Paare der Tangentialebenen an die absolute Kurve. Die Harmonizität zu diesem Paare bedeutet jedoch Rechtwinkligkeit der Doppelebenen zu einander. Daraus geht hervor, dass die betrachtete Involution hyperbolisch-gleichseitig ist. Da die Involution reelle Doppelebenen hat, so geht von zwei Punkten der g_0 nur je ein reelles Lot aus, und weil diese beiden Lote in den zu einander senkrechten Doppelebenen gelegen sind, so sind sie auch zu einander normal. Die beiden ausgezeichneten Punkte bilden die Grenze zwischen denjenigen Punkten der g_0, von welchen je zwei reelle Lote ausgehen, und denjenigen, welche für zwei konjugiert-imaginäre Lote Fusspunkte sind. Wenn A_1 und A_2 die beiden Grenzpunkte sind, so entsteht nun noch die Frage, ob von den Punkten der endlichen Strecke $A_1\,A_2$ oder von den Punkten auf der Ergänzung dieser Strecke, d. h. auf der Strecke $A_2 . A_1$, die reellen Lote kommen. Es genügt, auf einer der beiden Strecken ein imaginäres Paar nachzuweisen, um daraus sofort auf sämtliche Paare dieser Strecke zu schliessen. Wir erkennen unmittelbar dieses Lotepaar in den beiden von $\mathfrak{G}_0$ ausgehenden Tangenten

an $\mathfrak{K}^2$, die ja als imaginäre Lote nachgewiesen worden sind. Mithin können von den Punkten der Strecke $A_2 . A_1$ keine reellen Lote ausgehen, sondern nur von der endlichen Strecke $A_1 A_2$. Ergebnis ist:

Auf jeder Erzeugenden des Hyperboloids bestehen zwei Punkte, von denen nur je ein reelles Lot nach einer andern Geraden ausgeht; von jedem Punkte der endlichen Strecke zwischen diesen beiden ausgezeichneten Punkten kommen stets zwei reelle, von jedem weiteren Punkte zwei konjugiert-imaginäre Lote.

§ 3.

6. Jeder Geraden g ist ein Kegelschnitt Φ^2 zugeordnet. Wie viele von den Kegelschnitten des einfach unendlichen Systems, das der G-Schar zugehört, gehen durch einen beliebigen Punkt des Hyperboloids? Durch einen Punkt P läuft eine bestimmte Gerade g' der Regelschar G. Wenn P einem der ∞^1 Kegelschnitte angehören soll, so muss eines der Lote von der Geraden, welcher dieser Kegelschnitt zugehört, auf die g' durch P gehen. Dies muss für jeden der Kegelschnitte eintreten, auf denen P gelegen ist. Statt also nach der Anzahl der Kegelschnitte Φ^2 zu fragen, die durch P gehen, kann man fragen: Wie viele gemeinsame Lote durch P gibt es zwischen der durch P gehenden g' und den übrigen Geraden derselben Schar? Dafür haben wir aber bereits in Nr. 4 gefunden, dass es zwei derartige Lote gibt. Da jedes dieser Lote zu einer bestimmten g gehört, welcher dann wieder ein bestimmter Kegelschnitt zugeordnet ist, so gibt es unter den ∞^1 Kegelschnitten, die der G-Schar zugehören, stets zwei, welche durch einen Punkt der Fläche gehen. Daher ergibt sich:

Durch jeden Punkt des Hyperboloids gibt es immer zwei Kegelschnitte Φ^2, welche zu Geraden der G-Schar gehören.

7. Wir wollen nun die zu der g_0 parallele Erzeugende l_0 ins Auge fassen und das involutorische Ebenenbüschel der Tangentialebenen durch diese Gerade. Die asymptotisch berührende Ebene des Büschels um l_0 verbindet die l_0 mit derjenigen g, die nach dem unendlich fernen Punkte der l_0 hingeht, also mit der g_0. Die im Zentralpunkte P_0' von l_0 be-

rührende Ebene ist daher zu der Ebene g_0, l_0 senkrecht. Die Flächennormale im Punkte P_0' ist sowohl zu der l_0 senkrecht als auch zu der $\bar{g}_0$, welche die l_0 in P_0' trifft, und da sie die g_0 auch rechtwinklig schneidet und ebenso die $\bar{g}_0$, so ist sie gemeinsames Lot zwischen g_0 und $\bar{g}_0$. Da P_0' Fusspunkt dieses Lotes ist, so geht der zu g_0 gehörige Kegelschnitt Φ_0^2 durch P_0'. Mithin liegen die Centralpunkte von g_0 und l_0 beide auf ihm. Zu der Erzeugenden $\bar{g}_0$ gibt es eine parallele $\bar{l}_0$ aus der andern Regelschar. Da $g_0 \parallel l_0$ und $\bar{g}_0 \parallel \bar{l}_0$ ist, so ist die Ebene $(g_0, \bar{l}_0)$ parallel zur Ebene (g_0, l_0). Weil nun die $(\bar{g}_0, l_0)$ normal ist zu der (g_0, l_0), so ist $(g_0, \bar{l}_0) \perp (g_0, l_0)$. Diese beiden Ebenen sind demnach zugepaarte Ebenen in dem involutorischen Tangentialebenenbüschel um g_0, und da die (g_0, l_0) auch für diesen Büschel asymptotisch berührende Ebene ist, so muss die $(g_0, \bar{l}_0)$ im Zentralpunkte berühren, d. h. $\bar{l}_0$ geht durch den Zentralpunkt P_0 von g_0. Nun enthalten aber die Ebenen, welche zwei parallele Erzeugenden eines einmantligen Hyperboloids verbinden, stets den Mittelpunkt desselben, und die Schnittlinie je zweier derartiger Ebenen wird in dem Flächenmittelpunkte halbiert[1]). Die beiden hier in Betracht kommenden Ebenen dieser Art (g_0, l_0) und $(\bar{g}_0, \bar{l}_0)$ enthalten demnach den Mittelpunkt des Hyperboloids, und er ist Halbierungspunkt der Geraden $|g_0, \bar{l}_0|, |\bar{g}_0, l_0|$. Diese Gerade ist aber die Verbindungslinie der Zentralpunkte P_0 und P_0'. Weil beide Punkte in der Ebene des Φ_0^2 liegen, so ist auch ihre Verbindungslinie und mit ihr der Flächenmittelpunkt in dieser Ebene gelegen. Somit geht die Ebene des der g_0 zugeordneten Fusspunktkegelschnitts durch den Mittelpunkt des Hyperboloids. Da die übrigen Geraden der Regelschar G sich genau so verhalten wie die g_0, so gilt für sie dasselbe, und wir haben daher das Ergebnis:

Die Ebenen aller Kegelschnitte Φ^2, welche den Geraden der G-Schar des Hyperboloids zugeordnet sind, gehen sämtlich durch den Mittelpunkt desselben.

[1]) Schroeter, Theorie der Oberflächen 2. Ordnung, Seite 98.

8. Die Ebenen der Kegelschnitte Φ^2, zu denen wir von den Geraden der Regelschar G geführt worden sind, umhüllen einen Kegel mit der Spitze im Mittelpunkte M des Hyperboloids. Um die Klasse des erzeugten Kegels festzustellen, nimmt man eine beliebige Gerade m durch M an und sucht die Ebenen auf, welche durch sie an den Kegel gehen. Die Gerade m trifft die F^2 zum zweiten Male in dem Punkte X. Da durch jeden Punkt des Hyperboloids zwei Kegelschnitte gehen, so ist X in den Ebenen zweier derartiger Kegelschnitte gelegen. Weil alle Kegelschnittsebenen den Mittelpunkt M enthalten, so schneiden sich die beiden Ebenen, welche den Punkt X gemeinsam haben, noch in M und daher in der Geraden MX. Der zweite Schnitt von m führt zu demselben Kegelschnittpaar. Die beiden Ebenen durch m sind die einzigen Tangentialebenen an den Kegel, welche die m enthalten; derselbe ist daher von der zweiten Klasse:

Die Ebenen aller Kegelschnitte Φ^2, welche den Geraden der Regelschar G angehören, umhüllen einen Kegel 2. Grades, dessen Spitze im Flächenmittelpunkte gelegen ist.

9. Der auf diese Weise erzeugte Kegel 2. Grades K^2 schneidet das Hyperboloid in einer Raumkurve 4. Ordnung 1. Art, und die den K^2 umhüllenden Kegelschnittsebenen und Tangentialebenen an diese Kurve. Durch einen Punkt P der R^4 geht eine Berührungsebene an den Kegel, und sie enthält zugleich einen der Fundamentalkegelschnitte Φ^2. Dieser Kegelschnitt und die Raumkurve R^4, welche sich im Punkte P berühren, was sich folgendermassen zeigen läßt. Die Tangente in P an die Raumkurve ist Schnitt der Tangentialebene in P an das Hyperboloid mit der durch P gehenden Berührungsebene des Kegels. Andererseits ist die Schnittlinie der Berührungsebene im Punkte P an das Hyperboloid mit der durch P an den K^2 gelegten Ebene eine Tangente an die Schnittkurve, welche die durch P gehende Tangentialebene des Kegels mit der F^2 gemein hat. Das ist aber der Kegelschnitt Φ^2, welcher durch den Punkt P geht. Mithin hat derselbe mit der R^4 dieselbe Tangente in P, d. h. beide berühren sich in diesem Punkte. In der Geraden MP, der

Verbindungslinie von P mit dem Mittelpunkte, schneiden sich keine zwei Ebenen von Kegelschnitten Φ^2, da MP als Kante des Kegels nur der durch P gehenden Tangentialebene des K^2 angehört. Da also durch P nur eine Kegelschnittebene geht, so liegt P auch nur auf einem Fusspunktkegelschnitt Φ^2, und dieser ist es, der in P von der Raumkurve 4. Ordnung 1. Art berührt wird.

Die Schnittkurve des Hyperboloids mit dem Kegel 2. Grades, welcher von den Ebenen der zu den Geraden der G-Schar gehörigen Kegelschnitte Φ^2 eingehüllt wird, ist die Enveloppe aller dieser Kegelschnitte.

Da durch jeden Punkt der R_I^4 stets nur ein Fusspunktkegelschnitt geht, so ist jeder dieser Punkte auch nur für ein kürzestes Lot Fusspunkt. Weil die Raumkurve jede Erzeugende g in zwei Punkten schneidet, so geht von diesen beiden Punkten der g nur je ein Lot aus. Wir erkennen somit in der R_I^4 den Ort aller Punkte der Geraden g, welche nur für je ein reelles Lot Fusspunkte sind, und wir haben:

Konstruiert man zwischen den Geraden einer Regelschar die kürzesten Lote, so liegen die Punkte, bei denen es nur ein Lot gibt, das auf der durchgehenden Geraden und einer zweiten aus derselben Schar senkrecht steht, auf einer Raumkurve 4. Ordnung 1. Art.

10. Der Ort der Grenzpunkte, die Raumkurve R^4_I, grenzt auf dem Hyperboloid ein endliches Flächenstück ab, da jede Erzeugende zweimal getroffen und auf jeder eine endliche Strecke abgeschnitten wird. Nur innerhalb dieses endlichen Flächenstückes können Fusspunkte reeller Lote vorkommen. Denn betrachtet man einen Punkt X innerhalb des von der Kurve abgegrenzten Gebietes, so geht durch ihn eine ganz bestimmte Erzeugende g'. Diese wird von der Kurve in zwei Punkten geschnitten, etwa in A_1 und A_2. Da X innerhalb der R^4_I angenommen worden ist, so liegt X auf der endlichen Strecke A_1 A_2. Von allen Punkten dieser Strecke gehen lauter reelle Lote aus, also auch von dem Punkte X.

Alle reellen Kegelschnitte liegen innerhalb des endlichen Flächenstückes, und zwar gehen durch jeden Punkt desselben

zwei Kegelschnitte, während jeder Punkt der Grenzkurve nur auf einem einzigen Φ^2 gelegen ist. Durch jeden Punkt des Hyperboloids ausserhalb des endlichen Flächenstückes laufen ebenfalls zwei Fusspunktkurven, welche aber nicht mehr reell sind, da die aus diesem Flächengebiete an den Kegel K^2 kommenden Tangentialebenen imaginär sind. Somit erhalten wir ein neues Kennzeichen für das Innere und Aeussere der Grenzkurve, indem wir ihre Lage zu dem sie projizierenden Kegel K^2 beachten. Denn die Ebenen, welche die Kegelschnitte Φ^2 im Innern der Grenzkurve einschneiden, sind die reellen Tangentialebenen des K^2. Die reellen Tangentialebenen charakterisieren jedoch das Aeussere des Kegels. Somit steht das Aeussere des Kegels über dem Innern der Grenzkurve und das Innere des K^2 über dem Aeussern der Kurve. Es ergeben sich demnach folgende besonderen Eigenschaften der Grenzkurve:

Jede Gerade g wird von der Grenzkurve in zwei reellen Punkten geschnitten. Das Hyperboloid wird von ihr in ein endliches und ein unendlich grosses Flächenstück geteilt, von denen das erstere die reellen, das letztere die imaginären Kegelschnitte in sich fasst. Während durch jeden Punkt der beiden Gebiete zwei Kegelschnitte gehen, ist jeder Punkt der Grenzkurve nur auf einem einzigen gelegen.

§ 4.

11. Die von der Erzeugenden g_0 ausgehenden kürzesten Lote konnte man sich als Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier Punktreihen g_0 und s_0 vorstellen, welche in der Korrespondenz (1,2) stehen, wobei s_0 unendlich fern in einer zu g_0 normalen Ebene gelegen ist. Das Erzeugnis dieser beiden Punktreihen ist eine Regelfläche 3. Grades. Alle Erzeugenden derselben treffen die Geraden g_0 und s_0. Wir haben also in ihnen die beiden Leitgeraden der Regelfläche, und zwar ist g_0 die doppelte Leitgerade, da von jedem ihrer Punkte zwei Erzeugende ausgehen; die s_0 ist für die Fläche eine einfache Leitgerade, denn durch jeden Punkt auf ihr geht eine und nur eine Gerade. Alle Er-

zeugenden stehen auf der doppelten Leitgeraden senkrecht. Eine derartige Regelfläche 3. Grades bezeichnet man nach Cayley als Cylindroid. Somit haben wir den Satz:

Alle Lote, welche auf einer festen Geraden einer Regelschar und je einer weiteren Geraden derselben Schar senkrecht stehen, erzeugen eine Regelfläche 3. Grades, für welche die feste Gerade die doppelte Leitgerade ist.

12. Wir haben auf diese Weise, von einer Erzeugenden g_0 auf dem Hyperboloid ausgehend, der F^2 eine Regelfläche 3. Grades F_0^3 zugeordnet. Auf beiden Flächen liegen die Fusspunkte der kürzesten Lote zwischen g_0 und den übrigen Geraden g. Wir erkennen also jetzt den Kegelschnitt Φ_0^2, welcher der g_0 zugehört, d. h. den Ort der Fusspunkte auf den verschiedenen g von allen gemeinsamen Loten zwischen g_0 und diesen g, als Durchschnitt des Cylindroids F_0^3 mit dem Hyperboloid F^2. Beide Flächen befinden sich in der speziellen Lage zu einander, dass sie die Gerade g_0 gemeinsam haben, welche für die F^2 einfache, für die F_0^3 doppelte Leitgerade ist. Sie zählt somit in der Durchdringung doppelt, und da der volle Schnitt eine Raumkurve 6. Ordnung ist, so ist der eigentliche Schnitt beider Flächen eine Kurve 4. Ordnung. Aber nicht diese ganze Kurve ist Ort der Fusspunkte, indem sich noch zwei zu einander windschiefe Geraden ablösen. Um diese Geraden nachzuweisen, fasst man den Asymptotenkegel des Hyperboloids ins Auge. Jede Kante desselben ist einer g und einer l parallel. Sucht man die Geraden l auf, welche eine g auf dem Hyperboloid unter rechtem Winkel schneiden, so hat man nur auf der zu dieser g parallelen Kante des Asymptotenkegels in dessen Spitze die senkrechte Ebene zu konstruieren. Den Schnittkanten des Kegels mit dieser Ebene sind die gesuchten Geraden l parallel. Da die Ebene mit dem Kegel zwei Kanten gemein hat, so folgt daraus, dass es zu jeder g zwei l gibt, die sie rechtwinklig schneiden, oder dass jede g gemeinsames Lot zwischen zwei Geraden l ist. Entsprechendes gilt für die Geraden der L-Schar. Da es sonach zu jeder g zwei zu ihr normale Erzeugenden l aus der Regelschar L

gibt, welche ausserdem noch auf je einer andern g senkrecht sind, so sind diese beiden zu g_0 normalen l unter den Erzeugenden des Cylindroids F_0^3 enthalten. Weil dieselben auch dem Hyperboloid angehören, so bilden sie einen Teil der Durchdringung beider Flächen. Nachdem sich diese beiden Geraden abgelöst haben, bleibt der Fusspunktkegelschnitt Φ_0^2 zurück. Stellt man die analogen Betrachtungen bei allen Geraden der Regelschar G an, so ergibt sich die Gesamtheit aller Cylindroide, den verschiedenen Erzeugenden g zugehörig. In den Erzeugenden dieser Cylindroide haben wir die Geraden der kürzesten Entfernungen zwischen je zwei Geraden der G-Schar auf dem Hyperboloid. Dieselben bilden eine Kongruenz 3. Ordnung 2. Klasse[1]). Ausserdem ergeben sich durch die Schnitte der ∞^1 Cylindroide mit dem Hyperboloid sämtliche Kegelschnitte Φ_2, die den Erzeugenden g zugeordnet sind.

13. Nimmt man dieselben Untersuchungen bei den Geraden der L-Schar vor, so entsteht die Frage: Entsprechen den Erzeugenden l andere Fusspunktkegelschnitte als den g, oder erhalten wir dieselben? Dazu wollen wir einen beliebigen Punkt X auf dem der g_0 zugeordneten Kegelschnitt Φ_0^2 betrachten. Da X auf Φ_0^2 gelegen ist, so ist er Fusspunkt des kürzesten Lotes p_1 zwischen der g_0 und der durch X laufenden g_1. Durch X geht ausserdem eine Erzeugende l' aus der andern Regelschar. Man fälle nun von X auf die zu g_0 parallele l_0 das Lot q, welches also zunächst nur auf der l_0 senkrecht steht. Das Lot p_1 liegt in der Ebene (g_0, l'), während das Lot q in der Ebene (g_1, l_0) gelegen ist. Weil p_1 gemeinsames Lot ist zwischen g_0 und g_1, so ist es auch senkrecht zu l_0 und g_1 und mithin senkrecht zu der Ebene (g_1, l_0). In dieser Ebene liegt das zu l_0 normale Lot q, welches von p_1 in X getroffen wird. Mithin ist $p_1 \perp q$. Da ausserdem wegen des Parallelismus von g_0 und l_0 auch $q \perp g_0$ ist, so ist q senkrecht zu der Ebene (g_0, p_1), und weil diese Ebene auch die Gerade l' enthält, q senkrecht zur Ebene (g_0, l'), woraus folgt $q \perp l'$. Weil nun q die l'

[1]) Sturm, Liniengeometrie, Bd. I, Seite 184.

trifft, so ist es das kürzeste Lot zwischen l_0 und l'. Demnach gehört X dem der l_0 zugeordneten Fusspunktkegelschnitt an. Das für den beliebigen Punkt X gewonnene Resultat gilt ohne weiteres für alle anderen Punkte des Φ_0^2, so dass wir das Ergebnis haben:

Zu einem jeden Paare paralleler Erzeugenden des Hyperboloids gehört stets derselbe Fusspunktkegelschnitt.

Es bestehen somit auf dem Hyperboloid nicht, wie anzunehmen gewesen wäre, zwei einfach unendliche Mannigfaltigkeiten von Kegelschnitten Φ^2, sondern nur eine. Durch die Geraden der L-Schar werden wir also zu keinen neuen Ergebnissen geführt: Durch denselben Kegel 2. Grades, welcher von den Ebenen der denGeraden g zugeordneten Kegelschnitte eingehüllt wird, wird dieselbe Raumkurve 4. Ordnung 1. Art in das Hyperboloid als Ort der Grenzpunkte eingeschnitten. Jeder Punkt derselben ist demnach Grenzpunkt für die beiden Erzeugenden, die sich in ihm schneiden.

§ 5.

14. Die unendlich fernen Punkte des Kegelschnitts Φ_0^2 sind die Schnittpunkte des unendlich fernen Kegelschnitts $\mathfrak{C}^2$ der Fläche mit den Tangenten aus $\mathfrak{G}_0$ an die absolute Kurve, und als solche sind sie imaginär. Daraus folgt, dass Φ_0^2 eine Ellipse ist. Andere Arten von Kegelschnitten als Ellipsen können demnach unter den Φ^2 nicht vorkommen.

Jede zwei von einem Punkte der g_0 ausgehenden Lote bestimmen eine Ebene. Da alle derartigen Ebenen zu einander parallel sind, so schneiden sie in die Ebene des Φ_0^2 ein System von parallelen Sehnen des Φ_0^2 ein. Die Mittelpunkte der Sehnen liegen auf einem Durchmesser m der Ellipse. Betrachtet man einen der Schnittpunkte des m mit dem Φ_0^2, so erkennt man, dass durch ihn eine unendlich kleine von den Sehnen geht. Die Lote nach den Endpunkten dieser Sehne sind also unendlich nahe aneinander gerückt: der betrachtete Punkt des m ist zweiter Fusspunkt eines Grenzlotes der g_0. Unter den ∞^1 parallelen Sehnen gibt es einen Durchmesser n des Φ_0^2. Da bei der Projektion des

Φ_0^2 in der Richtung der g_0 der Durchmesser n in den Kreisdurchmesser übergeht, ohne seine Länge zu ändern, während alle andern Durchmesser der Ellipse sich verkleinern, so ist n der kleinste von ihnen und daher kleine Achse der Ellipse. Weil nun m und n konjugierte Durchmesser von Φ_0^2 sind, so muss m grosse Achse sein, und wir haben somit das Ergebnis:

Die zu einer Geraden g gehörigen Grenzlote haben ihre zweiten Fusspunkte in den Scheiteln der grossen Achse des zugeordneten Kegelschnitts.

Die kleine Achse geht durch die Projektion auf eine zu g_0 normale Ebene in einen Durchmesser des Projektionskreises über, und zwar in ihrer ursprünglichen Länge. Da der Durchmesser dieses Kreises gleich dem Abstande der Geraden g_0 und l_0 ist, so ergibt sich:

Die kleine Achse einer Ellipse Φ^2 ist gleich dem Abstande der zugehörigen Geraden g von ihrer parallelen l.

Zu der Geraden g_0 mögen die Grenzlote p_1 und p_2 gehören, und h bezeichne den Abstand der Grenzpunkte (g_0, p_1) und (g_0, p_2) von einander. Verbindet man den Punkt (m, p_2) mit dem Punkte (g_0, p_1) durch die Gerade r, so ist, weil p_1 auf der Ebene (g_0, p_2) senkrecht steht, $p_1 \perp r$. p_1, p_2 und r sollen zugleich die Längen der Strecken bezeichnen, welche auf den gleichbenannten Geraden durch die Fläche abgegrenzt werden. Wir haben alsdann zwei rechtwinklige Dreiecke erhalten mit den Seiten h, p_2, r bezw. p_1, r, m. Aus ihnen folgt durch zweimalige Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes:

$$1)\quad p_1^2 + p_2^2 + h^2 = m^2.$$

Bei der Projektion der Ellipse in der Richtung der g_0 auf eine zu g_0 normale Ebene gehen p_1 und p_2 in zwei Geraden über, welche ihre Länge und Richtung beibehalten und daher ebenfalls einen rechten Winkel miteinander bilden. Da sie also nach den Endpunkten eines Kreisdurchmessers gehen, der ja gleich der Achse n von Φ_0^2 ist, so gilt:

$$2)\quad p_1^2 + p_2^2 = n^2.$$

Aus 1) und 2) folgt: 3) $h = \sqrt{m^2 - n^2}$. Das ist aber der Ausdruck für die lineare Exzentrizität der Ellipse Φ_0^2. Satz:

Der Abstand der beiden Grenzpunkte einer Geraden von einander ist zugleich der Abstand der Brennpunkte der zugehörigen Fusspunktsellipse von dem Mittelpunkte.

Da zu zwei parallelen Erzeugenden dieselbe Ellipse gehört, so folgt aus dem gewonnenen Satze unmittelbar, dass auf ihnen die Strecken zwischen den Grenzpunkten einander gleich sind.

Aus 3) geht hervor, dass bei zusammenfallenden Grenzpunkten die Ellipse zu einem Kreise wird.

§ 6.

15. Die Grenzkurve ist die Enveloppe aller Fusspunktsellipsen, und daher schneiden sich in jedem ihrer Punkte zwei aufeinander folgende Φ^2. Da der Kegel K^2 die Grenzkurve projiziert, so schneiden sich in jeder Kante desselben zwei unendlich nahe Ellipsenebenen. Um die Schnittlinie der Φ_0^2-Ebene mit der benachbarten zu bestimmen, soll die Bewegung der unendlich fernen Geraden dieser Ebenen näher untersucht werden. Die unendlich fernen Punkte des Φ_0^2 erhält man in den Schnittpunkten $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{V}_0$ des $\mathfrak{C}^2$ mit den Tangenten aus $\mathfrak{G}_0$ an die absolute Kurve $\mathfrak{K}^2$. Ihre Verbindungslinie ist die unendlich ferne Gerade der Φ_0^2-Ebene. In derselben Weise, wie man zu $\mathfrak{G}_0$ die beiden Punkte $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{V}_0$ konstruiert hat, stellt man sich zu jedem Punkte $\mathfrak{G}$ des $\mathfrak{C}^2$ die Punkte $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ her. Die Verbindungsgeraden aller dieser Punktepaare umhüllen eine Kurve. Um die Klasse derselben zu bestimmen, ordnet man die Punkte $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ einander in folgender Weise zu. Von einem Punkte $\mathfrak{U}'$ legt man die beiden Tangenten an den $\mathfrak{K}^2$, schneidet sie zum zweiten Male mit $\mathfrak{C}^2$ in den Punkten $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$ und lässt dem $\mathfrak{U}'$ diejenigen beiden Punkte $\mathfrak{V}'$ entsprechen, in denen die zweiten Tangenten aus $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$ an $\mathfrak{K}^2$ den $\mathfrak{C}^2$ schneiden. Ebenso entsprechen in dieser Zuordnung einem Punkte $\mathfrak{V}$ zwei Punkte $\mathfrak{U}$. Da von zwei solchen entsprechen-

den Punkten jeder aus dem andern in gleicher Weise hervorgeht, so liegt eine involutorische Correspondenz [2] vor, und die Verbindungslinien entsprechender Punkte umhüllen einen Kegelschnitt, den wir auch als den unendlich fernen Kegelschnitt des Kegels K^2 erkennen.

Zu jedem Punkte $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{C}^2$ haben wir uns zwei Punkte $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ hergestellt, deren Verbindungslinie den unendlich fernen Kegelschnitt des K^2 berührt. Die unendlich ferne Gerade der $\Phi_0{}^2$-Ebene, die Gerade $\mathfrak{U}_0\,\mathfrak{V}_0$, schneidet sich mit der benachbarten $\mathfrak{U}_1\,\mathfrak{V}_1$ auf diesem Kegelschnitt. Um den Schnittpunkt beider deutlich entstehen zu sehen, möge $\mathfrak{U}_1\,\mathfrak{V}_1$ noch einen endlichen Winkel mit $\mathfrak{U}_0\,\mathfrak{V}_0$ bilden. Wir haben alsdann zwei Dreiecke vor uns $\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{U}_0\,\mathfrak{V}_0$ und $\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{U}_1\,\mathfrak{V}_1$, von denen das erstere fest, das letztere veränderlich gedacht sei. Da beide Dreiecke dem Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2$ eingeschrieben sind, so haben wir das Pascal'sche Sechs-Eck $\mathfrak{U}_0\,\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{V}_0\,\mathfrak{U}_1\,\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{V}_1$. Daraus folgt, dass die drei Punkte $(\mathfrak{U}_0\,\mathfrak{G}_0,\ \mathfrak{U}_1\,\mathfrak{G}_1)$, $(\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{V}_0,\ \mathfrak{G}_1\,\mathfrak{V}_1)$ und $(\mathfrak{V}_0\,\mathfrak{U}_1,\ \mathfrak{V}_1\,\mathfrak{U}_0)$ in einer Geraden liegen. $(\mathfrak{V}_0\,\mathfrak{U}_1,\ \mathfrak{V}_1\,\mathfrak{U}_0)$ und $(\mathfrak{U}_0\,\mathfrak{V}_0,\ \mathfrak{U}_1\,\mathfrak{V}_1)$ sind als Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks $\mathfrak{U}_0\,\mathfrak{V}_0\,\mathfrak{U}_1\,\mathfrak{V}_1$ harmonisch zueinander in Bezug auf die Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit $\mathfrak{U}_0\,\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{V}_0\,\mathfrak{V}_1$. Geht man nun zur Grenze über, so rückt $\mathfrak{G}_1$ unendlich nahe an $\mathfrak{G}_0$ heran, und die Punkte $(\mathfrak{U}_0\,\mathfrak{G}_0,\ \mathfrak{U}_1\,\mathfrak{G}_1)$ und $(\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{V}_0,\ \mathfrak{G}_1\,\mathfrak{V}_1)$ rücken in die Berührungspunkte der Geraden $\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{U}_0$ bezw. $\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{V}_0$ mit dem $\mathfrak{K}^2$. Der Punkt $(\mathfrak{V}_0\,\mathfrak{U}_1,\ \mathfrak{V}_1\,\mathfrak{U}_0)$, der ja mit beiden in gerader Linie liegt, kommt demnach auf die absolute Polare $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{G}_0$ zu liegen, ist also Schnittpunkt der $\mathfrak{U}_0\,\mathfrak{V}_0$ mit der $\mathfrak{p}$. Auf der Grenze fällt die Verbindungsgerade der Punkte $(\mathfrak{V}_0\,\mathfrak{U}_1,\ \mathfrak{V}_1\,\mathfrak{U}_0)$ und $(\mathfrak{U}_0\,\mathfrak{V}_0,\ \mathfrak{U}_1\,\mathfrak{V}_1)$ mit der Geraden $\mathfrak{U}_0\mathfrak{V}_0$ zusammen, und es ist demnach $(\mathfrak{U}_0\,\mathfrak{V}_0,\ \mathfrak{p})$ harmonisch zu $(\mathfrak{U}_0\,\mathfrak{V}_0,\ \mathfrak{U}_1\,\mathfrak{V}_1)$ in Bezug auf die Punkte $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{V}_0$. Der unendlich ferne Punkt $\mathfrak{W}$ der kleinen Achse n des $\Phi_0{}^2$ ist auf $\mathfrak{U}_0\,\mathfrak{V}_0$ gelegen. Da die kleine Achse in einer zu g_0 normalen Ebene liegt, so ist die unendlich ferne Gerade dieser Ebene die absolute Polare $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{G}_0$, und $\mathfrak{W}$ ist ein Punkt auf ihr. Mithin ist der Punkt $(\mathfrak{p},\ \mathfrak{U}_0\,\mathfrak{V}_0)$ der unendlich ferne Punkt der n. Ander-

seits sind aber die unendlich fernen Punkte der Achsen von Φ_0^2 harmonisch in Bezug auf $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{V}_0$. Da der unendlich ferne Punkt der n bereits als harmonisch erkannt ist zu dem Schnitt der $\mathfrak{U}_0\mathfrak{V}_0$ mit der unendlich nahen $\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_1$ in Bezug auf dieselben Grundpunkte $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{V}_0$, so folgt daraus, dass dieser Schnitt $(\mathfrak{U}_0\mathfrak{V}_0, \mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_1)$ identisch ist mit dem unendlich fernen Punkte der grossen Achse von Φ_0^2. Die Ebenen, welche den Flächenmittelpunkt M mit $\mathfrak{U}_0\mathfrak{V}_0$ bezw. $\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_1$ verbinden, sind zwei unendlich nahe Tangentialebenen des Kegels K^2, und die Kante, längs deren sie den K^2 berühren, ist die grosse Achse des Φ_0^2. Satz:

Die Kante, längs deren der Kegel K^2 von einer Ellipsenebene berührt wird, ist für die Ellipse grosse Achse.

Die Berührung der Grenzkurve mit den Φ^2 findet in den Schnittpunkten der Kanten des K^2 mit dem Hyperboloid statt. Da jede Kegelkante grosse Achse derjenigen Ellipse ist, welche in der längs der Kante berührenden Φ^2-Ebene gelegen ist, so ist jeder Berührungspunkt zwischen der Grenzkurve und einer Φ^2 Scheitel der grossen Achse der letzteren. Nun gehen aber die beiden zu einer g gehörigen Grenzlote, die ja in ihren ersten Fusspunkten die Grenzkurve bereits schneiden, durch die Scheitel der grossen Achse der zugehörigen Ellipse (Nr. 14). Jeder Scheitel A_1 der grossen Achse eines Kegelschnitts Φ^2 ist zweiter Fusspunkt eines Grenzlotes p_1, das zu derjenigen g gehört, welcher der Φ^2 zugeordnet ist. Die zweite Gerade g_1, auf der es senkrecht steht, ist also die durch A_1 gehende. Anderseits ist Φ_1^2 die einzige durch ihn gehende Fusspunktkurve, weil sie in A_1 die Grenzkurve berührt, d. h. die beiden Lote zwischen g_1 und anderen g, die in A_1 ihren Fusspunkt haben und von denen p_1 sicher das eine ist, sind unendlich nahe: p_1 ist auch Grenzlot für g_1, also A_1 Grenzpunkt der g_1.

Jedes Grenzlot ist Verbindungslinie zweier Grenzpunkte; alle Grenzlote sind Doppelsecanten der Grenzkurve.

16. Fasst man zwei aufeinander folgende Halbmesser des Hyperboloids auf, welche nach Punkten der Grenzkurve gehen, so stehen die Tangenten an die Kurve in den Endpunkten der

Halbmesser auf diesen senkrecht. Zwei benachbarte Punkte der Grenzkurve liegen also auf einer Kugel um den Mittelpunkt M. Auf diese Weise findet man, dass je zwei aufeinanderfolgende Punkte der Kurve auf einer Kugel gelegen sind. Man kommt daher zu dem Ergebnis:

Die Grenzkurve ist Schnitt des Hyperboloids mit einer zu ihm konzentrischen Kugel.

Um den Radius der Kugel zu berechnen, bedienen wir uns des Kegelschnitts $\bar{\Phi}^2$, welcher der durch einen Scheitel der a-Achse gehenden Geraden $\bar{g}$ zugehört. Da der Scheitel Zentralpunkt auf $\bar{g}$ ist, so ist er und damit auch der diametral gegenüber liegende Scheitelpunkt auf dem $\bar{\Phi}^2$ gelegen. Die kleine Achse eines Φ^2 ist gleich dem Abstande der zugehörigen g von ihrer parallelen l. Daraus folgt, dass die a-Achse des Hyperboloids kleine Achse des $\bar{\Phi}^2$ ist. Die grosse Achse des $\bar{\Phi}^2$ liegt demnach in der bc-Ebene der Fläche. Die Ebene bc schneidet aus dem Hyperboloid eine Hyperbel aus, welche die Ellipse $\bar{\Phi}^2$ in den Scheiteln der grossen Achse trifft. P sei einer derselben. Da die Ebene bc zu der Geraden $\bar{g}$ parallel ist, so geht sie durch deren unendlich fernen Punkt $\bar{\mathfrak{G}}$. Weil $\bar{\mathfrak{G}}$ ein unendlich ferner Punkt der in der bc gelegenen Hyperbel ist, so ist die Gerade $M\bar{\mathfrak{G}}$ eine ihrer Asymptoten und, weil sie $\bar{g}$ in $\bar{\mathfrak{G}}$ trifft, zu der letzteren parallel. Projiziert man nun die Ellipse $\bar{\Phi}^2$ in der Richtung der $\bar{g}$, oder was dasselbe ist, in der Richtung der Asymptote $M\bar{\mathfrak{G}}$ auf eine zu $\bar{g}$ normale Ebene ε, so geht der Scheitelpunkt P der Ellipse in einen Punkt P′ des Projektionskreises über, dessen Radius a ist. Da $\bar{g}$ senkrecht zu ε ist, so gilt dies auch für die Asymptote $M\bar{\mathfrak{G}}$ und ihre Parallele PP′. Der Radius a bezeichnet daher den Abstand der Geraden $M\bar{\mathfrak{G}}$ und PP′. Um also den Punkt P zu gewinnen, hat man in der bc-Ebene zu der Asymptote $M\bar{\mathfrak{G}}$ im Abstande a die Parallele zu ziehen, und ihr im Endlichen gelegener Schnitt mit der Hyperbel gibt uns alsdann einen Scheitel der grossen Achse des $\bar{\Phi}^2$. Die Strecke MP stellt den Radius der Grenzpunktekugel dar.

Ist $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\quad\frac{z^2}{c^2}=1$ die Gleichung des gegebenen Hyperboloids,

so ergibt sich die Gleichung der in der bc-Ebene liegenden Hyperbel

1) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Wird die Asymptote $M\bar{G}$ durch $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ dargestellt, so hat die im Abstande a zu ihr gezogenen Parallele die Gleichung:

2) $cy + bz = a\sqrt{b^2 + c^2}$. Aus 1) und 2) ergeben sich die Coordinaten des Scheitels P:

$$y_0 = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{2ac\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad z_0 = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2}{2ab\sqrt{b^2 + c^2}}$$

Hieraus findet man:

$$MP^2 = y_0^2 + z_0^2 = \frac{(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)^2}{4a^2b^2c^2} - c^2$$ als das Quadrat des gesuchten Kugelradius [1]. Bringt man den Ausdruck auf die Form

$$MP^2 = \frac{(a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2)^2}{4a^2b^2c^2} + a^2,$$ so erkennt man unmittelbar, dass der Radius reell und grösser als die Achse a ist. Der Schnitt der Kugel mit dem Hyperboloid,

[1]) Waelsch, Ueber eine Strahlenkongruenz beim Hyperboloid, Wiener Sitzungsberichte, Bd. 95, Seite 797. In dieser Abhandlung hat Waelsch die Strahlenkongruenz (3,2) untersucht, welche von den kürzesten Loten zwischen je zwei Erzeugenden derselben Regelschar eines Hyperboloids gebildet wird. Er hat darin nebenbei das Ergebnis gewonnen: „Zieht man zwischen einer Erzeugenden einer Regelschar einer Fläche 2. Ordnung und den übrigen Erzeugenden derselben Schar die kürzesten Transversalen, so erfüllen diese eine Regelfläche 3. Ordnung; variiert die erste Erzeugende, so erfüllen die Kuspidalpunkte dieser Fläche eine sphärische Kurve 4. Ordnung, ihre Kuspidalkanten eine Fläche 2. Ordnung, für welche diese Kurve 4. Ordnung Orthogonalpunktskurve ist. Man erhält dieselbe Kurve für die Erzeugenden der andern Regelschar.“ Der erste Teil meiner Arbeit bringt einen direkten und wohl einfacheren Beweis dieses Ergebnisses.

Zur Berechnung des Radius der Kuspidalpunktkugel benutzt Waelsch die Gleichung der Brennfläche der Transversalenkongruenz, während ich nur die Achsen eines geeigneten Fusspunktkegelschnitts heranzuziehen brauchte.

d. h. die Grenzkurve ist demnach unter allen Umständen reell. Dem Hyperboloid ist auf diese Weise neben der Kugel, die seine Orthogonalkurve[1]) enthält, eine zweite Kugel zugeordnet worden, die in die Fläche die Grenzkurve einschneidet. Diese hat jedoch vor jener den Vorzug, dass sie stets reell ist und das Hyperboloid in einer reellen Kurve schneidet, die alle Geraden der Fläche reell trifft. Die Orthogonalkugel und -kurve können dagegen auch gleichzeitig imaginär werden, wie dies ja für $c^2 > a^2 + b^2$ eintritt.

§ 7.

17. Jedem Punkte der Grenzkurve soll derjenige Punkt auf demselben Träger zugeordnet werden, welcher mit ihm auf demselben Grenzlote einer Geraden g gelegen ist. Da zwei derartige Punkte sich gegenseitig entsprechen, so ist die Beziehung involutorisch: es liegt eine involutorische Korrespondenz [1] vor. Projiziert man die Grenzkurve aus einem beliebigen auf ihr gelegenen Punkte P auf eine Ebene, so ist die Projektion eine ebene Kurve 3. Ordnung; dieselbe ist, wie auch die R^4_1, vom Geschlecht 1. Die Involution auf R^4_1 projiziert sich wieder in eine solche auf der C^3, wobei gepaarte Punkte in gepaarte Punkte übergehen. Um die Zahl der Koinzidenzelemente zu bestimmen, betrachtet man eine Korrespondenz innerhalb der Geraden g des Hyperboloids, welche folgendermassen zustande kommt. Man ordnet einer beliebigen Geraden g_1 diejenigen beiden Geraden g′ und g″

[1]) Ludwig bezeichnet in seiner Inaug.-Dissertation: „Ueber die Ebenen, welche aus einer Fläche 2. Grades einem gegebenen Kegelschnitt ähnliche Kegelschnitte ausschneiden", Breslau 1898, die Kurve der Punkte einer Fläche 2. Grades, in denen sich die beiden durch sie gehenden Geraden der Fläche unter einem gegebenen Winkel ϑ schneiden, als die ϑ-Kurve der Fläche. Er kommt zu dem Resultat: Die ϑ-Kurven einer centrischen Fläche 2. Grades sind im allgemeinen Raumkurven 8. Ordnung, die den Geraden beider Regelscharen der Fläche je viermal begegnen. Die $\frac{\pi}{2}$-Kurve besteht aus einer doppelt zu rechnenden Raumkurve 4. Ordnung 1. Art, die er die Orthogonalkurve nennt.

zu, auf denen die Grenzlote der g_1 normal sind. Da das gemeinsame Lot zwischen g_1 und g' auch für die g' Grenzlot ist, so gehört die g_1 zu den beiden g, welche der g' entsprechen. Wir haben somit eine involutorische Korrespondenz [2] vor. Dieselbe besitzt vier Koinzidenzen, d. h. es treten vier unendlich kleine Grenzlote auf, und es kommt daher viermal vor, dass ein Grenzlot zur Tangente an die Grenzkurve wird. Bei der Projektion aus dem Punkte P werden diese vier ausgezeichneten Grenzlote zu Tangenten der C^3, und ihre Berührungspunkte sind die vier Coinzidenzpunkte der Punktinvolution auf C^3. Nun gibt es jedoch auf einer allgemeinen ebenen Kurve 3. Ordnung nur 2 Arten von eindeutigen Punktbeziehungen[1]). Von diesen sind die einen dadurch charakterisiert, dass sie keine Koinzidenzelemente besitzen und mit Ausnahme der drei Systeme konjugierter Punkte sämtlich nicht involutorisch sind. Die zweite Art der eindeutigen Beziehungen ist durchgehends involutorisch und weist vier Koinzidenzen auf. Alle diese Correspondenzen entstehen dadurch, dass ein Strahlenbüschel mit seinem Scheitel auf die C^3 gelegt wird und die beiden weiteren Schnitte eines jeden Strahles einander entsprechen. Unsere Projektionskurve C^3 ist eine allgemeine Curve 3. Ordnung, da bei der Projektion der R^4_1 aus P keine singulären Elemente entstehen. Da ausserdem die eindeutige Beziehung auf der C^3 involutorisch ist und vier Koinzidenzelemente besitzt, so muss sie der zweiten Art von Beziehungen angehören und also durch einen Strahlenbüschel in die C^3 eingeschnitten werden, dessen Scheitel P' auf der Kurve gelegen ist. Geht man nun von der C^3 wieder zu der Grenzkurve zurück, so erkennt man, dass alle Ebenen, durch welche die Grenzlote aus P projiziert werden, durch den Punkt P'

[1]) Em. Weyr, Ueber eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Kurve 3. Ordnung, Wiener Sitzungsberichte, Bd. 87, Seite 848. Den allgemeinen Gedankengang dieses Beweises mit Benutzung der Beziehungen auf der ebenen Kurve 3. Ordnung und die Hinweisung auf die Abhandlung von Em. Weyr verdanke ich Herrn Professor Sturm.

gehen müssen. Daraus folgt, dass die Grenzlote sämtlich die Gerade PP' treffen. PP' schneidet die R^4_1 ausser in P noch in einem weiteren Punkte, nämlich in demjenigen, welcher aus P in den Punkt P' projiziert worden ist. Mithin ist PP' eine Doppelsekante der Grenzkurve, die von allen Grenzloten der Geraden g getroffen wird. Nun bilden aber alle Sehnen einer Raumkurve 4. Ordnung 1. Art, welche eine feste Sehne derselben Kurve schneiden, eine Regelschar einer Fläche 2. Grades, die durch die R^4_1 geht. Demnach liegen alle Grenzlote der Geraden g auf einer Fläche 2. Grades F_1^2. Entsprechend zeigt man, dass die zu den Geraden der L-Schar gehörigen Grenzlote auf einer zweiten Fläche 2. Grades F_2^2 verlaufen, auf der gleichfalls die Grenzkurve gelegen ist. Aus der Symmetrie in Bezug auf den Mittelpunkt M folgt: Gehen von einem Punkte der g_0 die kürzesten Lote p_1 und p_2 nach den Geraden g_1 bezw. g_2 aus, so schneiden sich die kürzesten Lote q_1 und q_2 zwischen l_0 und l_1 bezw. l_2 in demselben Punkte der l_0, und zwar ist dann $p_1 \parallel q_1$, $p_2 \parallel q_2$. Vereinigen sich nun p_1 und p_2 in dem Grenzlote p', so fallen q_1 und q_2 in das zu p' parallele Grenzlot q'. Somit gibt es zu jedem Grenzlot einer g ein paralleles, welches der parallelen l zugehört. Die Fläche F_1^2 schneidet in die unendlich ferne Ebene $\mathfrak{E}$ einen Kegelschnitt $\mathfrak{D}^2$ ein; durch jeden Punkt desselben geht ein Grenzlot einer g. Da zu jedem Grenzlot aus der G-Schar ein solches aus der L-Schar parallel ist, so ist jeder Punkt des $\mathfrak{D}^2$ Punkt eines Grenzlotes der l. Demnach ist $\mathfrak{D}^2$ sowohl auf F_1^2 als auf F_2^2 gelegen. Da beide Flächen die Grenzkurve und den $\mathfrak{D}^2$ gemeinsam haben, so sind sie identisch, und wir haben daher das Ergebnis:

Die Grenzlote der Geraden g eines Hyperboloids bilden die eine, diejenigen der Geraden l die andre Regelschar einer Fläche 2. Grades; dieselbe schneidet die Grenzkurve in das Hyperboloid ein.

18. Welche Bedeutung hat die Grenzkurve des Hyperboloids für die neue Fläche, auf der die Grenzlote die Erzeugenden sind? Von der Geraden g_0 gehen die beiden

Grenzlote p' und p'' aus nach den Geraden g' bezw. g''. Alsdann ist p' in der Ebene gelegen, welche durch g_0 geht und auf der (g_0, l') normal ist, wo $l' \parallel g'$ ist. Das andere Lot p'' liegt in der Ebene durch g_0 senkrecht zu der Ebene, welche g_0 mit der zu g'' parallelen l'' verbindet. Da nach Nr. 5 $(g_0, p') \perp (g_0, p'')$ ist, so ist $(g_0, l') \perp (g_0, l'')$. Die Grenzlote gehen demnach zu denjenigen Geraden g hin, deren Parallelen l in gepaarten Ebenen des rechtwinklig-involutorischen Tangentialebenenbüschels um g_0 liegen. Wegen $(g_0, p') \perp (g_0, p'')$ und $(g_0, p'') \perp (g_0, l'')$ ist $(g_0, p' \equiv (g_0, l'')$ und ebenso $(g_0, p'') \equiv (g_0, l')$, d. h. p' trifft die l'', l' die p''. Weil die Punkte (p', l'') und (p'', l') die zweiten Endpunkte von p' bezw. p'' und daher die Endpunkte der grossen Achse der zu g_0 gehörigen Ellipse Φ_0^2 sind (vgl. Nr. 14), so muss durch den Punkt (p', l'') die Gerade g', durch (p'', l') die g'' gehen. Das Grenzlot q' zwischen l_0 und l' ist parallel zu p' und geht, da es die l' auf der Grenzkurve treffen muss, durch den Punkt (g'', l'). Von diesem kommen demnach die beiden Grenzlote p'' und q', und beide liegen in der Ebene, welche den Punkt (g'', l') enthält und auf g_0 und l_0 senkrecht steht. Da $p'' \perp p'$ und $p' \parallel q'$ ist, so ist $p'' \perp q'$, d. h. die beiden Erzeugenden p'' und q' der Grenzlotfläche, welche sich auf der Grenzkurve schneiden, tun dies unter rechtem Winkel. Dasselbe lässt sich von je zwei weiteren Erzeugenden zeigen, deren Schnittpunkt auf der Grenzkurve gelegen ist. Mithin ergibt sich:

Die Grenzkurve des gegebenen Hyperboloids ist für die Fläche 2. Grades, auf der die Grenzlote verlaufen, die Orthogonalkurve.

19. Die Orthogonalkurve wird in die Grenzlotfläche durch die Orthogonalkugel eingeschnitten, deren Mittelpunkt in demjenigen dieser Fläche liegt. Nun hat sich aber bereits in Nr. 16 herausgestellt, dass die Grenzkurve auf einer mit dem gegebenen Hyperboloid konzentrischen Kugel verläuft. Da wir dieselbe jetzt als konzentrisch mit der Grenzlotfläche erkannt haben, so folgt daraus, dass die Fläche der Grenzlote mit dem Hyperboloid F^2 konzentrisch ist.

Die Achsen des Hyperboloids F^2 haben zu unendlich fernen Punkten die Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks, dessen Ecken die Schnittpunkte des $\mathfrak{C}^2$ mit der absoluten Kurve $\mathfrak{K}^2$ sind. Demnach ist die einzige Bedingung dafür, dass eine Fläche 2. Grades H^2 mit der F^2 parallele Achsen hat, die, dass der unendlich ferne Kegelschnitt der H^2 durch die Schnittpunkte des $\mathfrak{C}^2$ mit dem $\mathfrak{K}^2$ geht. Daraufhin wollen wir den unendlich fernen Kegelschnitt $\mathfrak{D}^2$ der Grenzlotfläche untersuchen. Auf der absoluten Polare eines Punktes $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{C}^2$ ergab sich eine hyperbolisch-gleichseitige Involution (Nr. 5); in ihr sind je zwei Punkte gepaart, die auf Loten gelegen sind, welche auf der durch $\mathfrak{G}$ gehenden Geraden g in demselben Punkte normal sind. Da zu den Punktepaaren dieser Involution die Berührungspunkte der Tangenten aus $\mathfrak{G}$ an den $\mathfrak{K}^2$ gehören, so sind die Doppelpunkte auch zu diesem Punktepaar harmonisch. Alle Doppelpunkte sind als unendlich ferne Punkte der Grenzlote auf dem $\mathfrak{D}^2$ gelegen. Nun sei $\mathfrak{G}_1$ einer der Schnittpunkte des $\mathfrak{C}^2$ mit dem $\mathfrak{K}^2$. Seine absolute Polare ist die Tangente t_1 in $\mathfrak{G}_1$ an den $\mathfrak{K}^2$, und die Berührungspunkte der Tangenten aus $\mathfrak{G}_1$ an die absolute Kurve haben sich in $\mathfrak{G}_1$ vereinigt. Da die Doppelpunkte der Involution auf t_1 zu diesen Berührungspunkten harmonisch sind, so fällt ein Doppelpunkt gleichfalls in den $\mathfrak{G}_1$, d. h. $\mathfrak{G}_1$ ist ein Punkt des $\mathfrak{D}^2$. Weil somit $\mathfrak{D}^2$ durch die vier Schnittpunkte des $\mathfrak{C}^2$ mit dem $\mathfrak{K}^2$ geht, so sind die Achsen der Grenzlotfläche zu denen der gegebenen Fläche parallel, und weil sie sich bereits als konzentrisch erwiesen haben, so müssen ihre Achsen zusammenfallen. Ergebnis:

Das gegebene Hyperboloid ist mit der Fläche der zu seinen Erzeugenden gehörigen Grenzlote konzentrisch und koaxial.

20. Man kann nunmehr die hyperbolisch-gleichseitige Involution auf einer beliebigen Polare — sie sei s_0 und gehöre zu dem Punkte $\mathfrak{G}_0$ des $\mathfrak{C}^2$ — noch in anderer Weise deuten. Auf s_0 liegen die unendlich fernen Punkte der zu der Erzeugenden g_0 gehörigen Lote. In der Involution auf s_0 sind je zwei Punkte gepaart, die von Loten aus demselben

Punkte der g_0 eingeschnitten werden. Die Doppelpunkte dieser Involution haben sich als die Schnittpunkte der s_0 mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{D}^2$ herausgestellt. Auf s_0 besteht noch eine zweite Involution, in der je zwei Punkte gepaart sind, welche in Bezug auf $\mathfrak{D}^2$ konjugiert sind; ihre Doppelpunkte sind gleichfalls die Schnitte der s_0 mit dem $\mathfrak{D}^2$. Es haben sich somit zwei Involutionen auf demselben Träger ergeben, die dieselben Doppelpunkte besitzen. Daraus geht sofort ihre Identität hervor, und die hyperbolisch-gleichseitige Involution auf s_0 lässt sich jetzt folgendermassen definieren:

Von jedem Punkte der Erzeugenden g_0 des Hyperboloids gehen zwei Lote aus, welche auf der g_0 und je einer weiteren Geraden der G-Schar senkrecht stehen. Dieselben laufen nach zwei Punkten der s_0, welche in Bezug auf den unendlich fernen Kegelschnitt der Grenzlotfläche konjugiert sind.

§ 8.

21. Die unendlich ferne Ebene $\mathfrak{E}$ ist eine singuläre Ebene 2. Grades der Kongruenz (3,2), welche die kürzesten Lote zwischen je zwei Geraden g erzeugen; die Kongruenzstrahlen in $\mathfrak{E}$ umhüllen die absolute Kurve $\mathfrak{K}^2$. Durch jeden Punkt der $\mathfrak{E}$ gehen drei Strahlen der Kongruenz, die beiden Tangenten an $\mathfrak{K}^2$ und ein Strahl, der ins Endliche geht. Alle Strahlen der Kongruenz, welche einer beliebigen Geraden begegnen, bilden eine Regelfläche 5. Grades, für welche die Gerade dreifache Leitgerade ist. Wenn diese Gerade nun in die $\mathfrak{E}$ gelegt wird, so löst sich von der Regelfläche 5. Grades die absolute Kurve als Regelfläche 2. Grades los, und die übrigen Strahlen bilden eine Regelfläche 3. Grades, die ins Endliche geht. Wir wollen jetzt die vier Schnittpunkte $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$, $\mathfrak{G}_4$ des $\mathfrak{E}^2$ mit dem $\mathfrak{K}^2$ ins Auge fassen, und zwar zunächst die Gerade $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$. Sucht man die Fläche der Kongruenzstrahlen auf, welche die $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$ treffen, so zerfällt die ins Endliche gehende Regelfläche 3. Grades, da $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ Scheitel von singulären Strahlenbüscheln sind. Bezeichnet man nämlich mit g_1 und l_1 die Erzeugenden des Hyperboloids, welche durch den Punkt $\mathfrak{G}_1$ gehen, und mit t_1 die Tangente

in $\mathfrak{G}_1$ an die absolute Kurve, so ist t_1 die absolute Polare von $\mathfrak{G}_1$. Die Tangente t_1 schneidet den $\mathfrak{C}^2$ noch in einem Punkte $\mathfrak{G}'$, durch welchen die Gerade g' gehen möge. Da in $\mathfrak{G}_1$ die g_1 sich mit t_1 und der absoluten Polare von $\mathfrak{G}'$ trifft, so ist jeder Strahl des Büschels um $\mathfrak{G}_1$ in der Ebene $(\mathfrak{G}_1, g')$ ein gemeinsames Lot zwischen g_1 und g', also ein Strahl der Kongruenz. Die Ebene $(\mathfrak{G}_1, g')$ ist aber identisch mit der Ebene (l_1, t_1). Ein zweites derartiges singuläres Strahlenbüschel ergibt sich um den Punkt $\mathfrak{G}_2$ in der Ebene (l_2, t_2), wo l_2 die durch $\mathfrak{G}_2$ gehende Gerade der L-Schar und t_2 die Tangente in $\mathfrak{G}_2$ an $\mathfrak{K}^2$ bedeutet. Nachdem sich diese beiden Strahlenbüschel von der Regelfläche 3. Grades losgelöst haben, bleibt ein weiteres Strahlenbüschel übrig, dessen Strahlen die $\mathfrak{G}_1$ $\mathfrak{G}_2$ treffen und ins Endliche gehen.

Legt man die Treffgerade der Kongruenzstrahlen statt in die $\mathfrak{G}_1$ $\mathfrak{G}_2$ in eine andere von den sechs Geraden, welche die vier Schnittpunkte des $\mathfrak{C}^2$ mit dem $\mathfrak{K}_1$ verbinden, so gelangt man nacheinander zu sechs Strahlenbüscheln, die aber nicht sämtlich reell sind. Sind $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ konjugiert imaginäre Punkte, so ist die Gerade $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$ reell, und wir erhalten in dem Strahlenbüschel, dessen Strahlen die $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$ treffen, ein reelles; ein zweites reelles Strahlenbüschel wird von den Strahlen gebildet, welche die $\mathfrak{G}_3\mathfrak{G}_4$ schneiden. Die vier übrigen singulären Strahlenbüschel sind imaginär.

Da die kürzesten Lote, die nach den Punkten der $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$ hingehen, sämtlich in einer Ebene gelegen sind, deren unendlich ferne Gerade die $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$ ist, so ist diese Ebene eine Kreisschnittebene. Weil die singulären Ebenen durch $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_3\mathfrak{G}_4$ reell sind, so ist der Punkt $(\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3\mathfrak{G}_4)$ der unendlich ferne Punkt der a-Achse des Hyperboloids. Dieser Punkt entsendet gleichfalls einen Kongruenzstrahl, nämlich die Achse a als gemeinsames Lot zwischen den Scheitelerzeugenden dieser Achse. Mithin liegt die a selbst in der singulären Ebene, d. h. die singuläre Ebene durch $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$ ist die eine reelle Kreisschnittebene durch die a-Achse. Die andere ist die Ebene durch $\mathfrak{G}_3\mathfrak{G}_4$. Jeder von den beiden

ausgeschnittenen Kreisen K_1 und K_2 kann als Fusspunktkurve von Loten auf die Regelschar der g angesehen werden, und zwar steht jedes dieser Lote auf zwei Geraden g senkrecht. Der Punkt, zu dem die Fusspunktskurve gehört, ist der Scheitel des oben besprochenen Büschels in der Ebene des Kreises. Nimmt man nun noch die andere Regelschar, so wird man zu vier Punkten geführt, in Bezug auf welche die beiden Kreise den Ort der Fusspunkte bilden. Man findet dieselben, indem man auf den Geraden der einen oder der andern Schar in ihren Stützpunkten auf K_1 oder K_2 die Normalebenen errichtet. Auf diese Weise wird man die Punkte S^1_g, S^1_l, S^2_g, S^2_l erhalten. Hierbei bedeutet S^1_g denjenigen Punkt, in welchem sich die auf den Geraden g in ihren Stützpunkten auf K_1 errichteten Ebenen schneiden. Die Lage des Punktes S^1_g ist teilweise bestimmt durch die Ebenen, welche auf den Erzeugenden durch die Scheitel der a-Achse in den letzteren senkrecht stehen. Da sich diese Ebenen in der Achse a schneiden, so ist S^1_g auf a gelegen, und gleiches gilt für die übrigen drei Punkte. Die Punkte des K_1 liegen symmetrisch in Bezug auf den Mittelpunkt. S^1_g liegt in den Ebenen senkrecht zu den g, S^1_l in denjenigen senkrecht zu den l, wo beide Arten von Ebenen in den Punkten des K_1 errichtet sind. Konstruiert man zu einer g in ihrem Stützpunkte auf K_1 die Normalebene, so entspricht ihr die senkrechte Ebene auf der parallelen l in dem diametral gegenüber liegenden Punkte. Entsprechende Ebenen schneiden von einer Geraden durch das Zentrum gleiche Stücke ab, also auch von der a-Achse. Da Symmetrie in Bezug auf den Mittelpunkt vorliegt, so liegen diese Schnittpunkte mit der a zu verschiedenen Seiten des Mittelpunktes in gleichen Abständen von ihm.

Die Ebenen der beiden Kreise sind symmetrisch in Bezug auf die ac-Ebene. Einer Erzeugenden g_1 entspricht in dieser Symmetrie eine Erzeugende l' und daher dem Schnittpunkte der g_1 mit dem K_1 der Stützpunkt der l' auf den K_2. Die Ebene, die in dem Punkte (g_1, K_1) auf der g_1 senkrecht steht, hat zur entsprechenden diejenige, welche in

(l', K_2) zu l' normal ist, und beide schneiden sich daher in der Symmetrieebene. Mithin treffen beide Ebenen die a-Achse in demselben Punkte. Dieser Punkt ist also sowohl der S^1_g als der S^2_1; ebenso ist $S^1_1 = S^2_g$. Die vier Punkte, zu denen wir anfangs geführt worden sind, haben sich somit als identisch mit zweien herausgestellt, die auf der a-Achse symmetrisch in Bezug auf den Mittelpunkt gelegen sind.

Um die Entfernung des Punktes S^1_g vom Mittelpunkte zu finden, bedienen wir uns der Erzeugenden g, welche durch einen Scheitel der b-Achse geht. Die Gerade hat die Gleichungen $y = b$, $z = \frac{c}{a} x$. Der Stützpunkt der Geraden auf den Kreis K_1 in der Ebene

$$cy\sqrt{a^2 - b^2} - bz\sqrt{a^2 + c^2} = 0$$

hat alsdann die Koordinaten:

$$x_0 = a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\ ;\ y_0 = b;\ z_0 = c\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}}.$$ Demnach ergibt sich Sg^1 als Schnitt der a mit der Ebene $x - \frac{c}{a} z = \frac{1}{a}\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 + c^2)}$, und sein Abstand vom Mittelpunkt ist daher $\frac{1}{a}\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 + c^2)}$.

II. Das orthogonale Hyperboloid.

§ 9.

22. Wir wollen nun die speziellen Flächen 2. Grades mit reellen Geradenscharen vornehmen, zunächst das orthogonale Hyperboloid. Diese Fläche wird erzeugt durch die Schnittlinien aller Ebenenpaare, welche durch zwei windschiefe Geraden gehen und zu einander normal sind. Unter den Erzeugenden, welche sich auf diese Weise ergeben, sollen zunächst zwei ausgezeichnete betrachtet werden, die folgendermassen entstehen. Sind l' und l'' die Achsen der die Fläche erzeugenden orthogonal-projektiven Ebenenbüschel, so legt man durch l' die parallele Ebene ε' zu l'' und durch diese letztere Gerade die Ebene ε'' zu l' parallel. Legt man noch

durch l' und l'' die Ebenen senkrecht zu ε' bezw. ε'', so schneiden sich diese in dem kürzesten Lote a zwischen l' und l''. Die Fusspunkte desselben seien P' und P''. Durch sie gehen zwei Erzeugende g' und g'', wobei P' auf g', P'' auf g'' liegen mag. Ich behaupte, dass dann g' und g'' den Achsen l' bezw. l'' parallel sind. g' ist Schnitt der durch l'' parallel zu l' gelegten Ebene ε'' mit der Ebene durch l' senkrecht zu ihr; denn letztere Ebene geht durch P'P''. Also sind l' und g' Schnitte dieser Ebene mit den parallelen ε' und ε'' und daher zu einander parallel. In entsprechender Weise zeigt man, dass g'' ∥ l'' ist. Nun ist P'P'' ≡ a gemeinsames Lot zwischen l' und l''. Da g' durch P' geht und parallel zu l' ist, so ist a auch senkrecht zu g' im Punkte P'. Ebenso folgt aus dem Parallelismus von g'' mit l'' und der Orthogonalität von a und l', dass a zu g'' normal ist. Mithin ist a gemeinsames Lot zwischen l' und l'', wie auch zwischen g' und g''. Diese Gerade a ist bekanntlich die grössere reell schneidende Achse des Hyperboloids[1]).

Unter den zu einer Geraden g_0 gehörigen Loten seien zunächst nur die nach g' und g'' hingehenden Lote ins Auge gefasst; dieselben seien p' bezw. p'' benannt. Alsdann ist $p' \perp (g_0, l')$ und $p'' \perp (g_0, l'')$. Anderseits stehen die Ebenen, welche eine g mit l' und l'' verbinden, aufeinander senkrecht, also $(g_0, l') \perp (g_0, l'')$. Mithin liegt p' in der Ebene (g_0, l'') und p'' in der Ebene (g_0, l'), d. h. p' trifft die l'', p'' die l'. Dann begegnet das Lot p' den drei Geraden g_0, g' und l'', und zwar liegt p' in der Ebene (g_0, l''). Die g' trifft somit die Geraden p' und l'' der Ebene (g_0, l''). Es sind nun zwei Möglichkeiten denkbar: entweder findet das Treffen in zwei verschiedenen Punkten auf p' und l'' statt oder in dem Schnittpunkte (p', l''). Die erste Art des Treffens ist jedoch nicht möglich, da g' in die Ebene (g_0, l'') fallen und also die g_0 schneiden würde. Demnach muss g' durch den Punkt (p', l'') gehen, d. h. das Lot p' enthält den Punkt (g', l'') ≡ P'. In analoger Weise lässt sich zeigen, dass p''

[1]) Schroeter, Theorie der Oberflächen 2. Ordnung Seite 188.

durch P'' geht. Da p' und p'' in den Punkten P' bezw. P'' auf den Erzeugenden g' bezw. g'' senkrecht stehen, so sind P' und P'' auf dem zur g_0 gehörigen Kegelschnitt Φ_0^2 gelegen. Weil die g_0 eine ganz beliebige Erzeugende der G-Schar ist, so gilt das in Bezug auf sie gewonnene Resultat für jede weitere g, denn die Achsen l' und l'' ändern ja ihr Verhalten ebensowenig wie g' und g''. Daher gehen alle Kegelschnitte Φ^2 durch die Punkte P' und P'', und ihre Ebenen bilden also ein Büschel um die Gerade P'P''. Wir haben demnach den Satz:

Sämtliche den einzelnen Geraden der G-Schar auf dem orthogonalen Hyperboloid zugehörigen Fusspunktkegelschnitte sind in den Ebenen des Büschels um die grosse reell schneidende Hauptachse gelegen.

23. Bei der Fusspunktkurve, die zu g' (oder g'') gehört, ist dieser Satz leicht zu bestätigen. Was für das allgemeine Hyperboloid gilt, bleibt auch in dem spezielleren jetzigen Falle bestehen: der einer g zugeordnete Kegelschnitt Φ^2 geht durch den Zentralpunkt der Geraden. In dem Zentralpunkte von g' berührt diejenige Ebene der Fläche, welche zu der Ebene (g', l') normal ist. Zu (g', l') ist senkrecht die Ebene (g', l''), da g' Erzeugende der Fläche ist und sich in ihr zwei zu einander normale Ebenen der beiden orthogonal-projektiven Büschel l' und l'' schneiden. Mithin ist P' Zentralpunkt der g'. Durch ihn geht also zunächst die der g' zugeordnete Fusspunktkurve Φ'^2. Dieselbe muss, da a gemeinsames Lot zwischen g' und g'' ist, auch den Punkt P'' enthalten. Dasselbe gilt für den Kegelschnitt der g'': beide gehen durch die Punkte P' und P''.

§ 10.

24. Jeder Punkt auf einer Erzeugenden des allgemeinen Hyperboloids ist Fusspunkt für zwei Lote, die je noch eine weitere Gerade derselben Schar rechtwinklig schneiden. Von diesem Verhalten machen die Geraden g', l' und g'', l'' eine Ausnahme, während alle andern Erzeugenden ihr Verhalten nicht ändern. Weil die Lote, welche zu den verschiedenen g gehören

und auf der g' senkrecht stehen, ihre Fusspunkte in P' haben, so folgt daraus, dass die kürzesten Lote zwischen g' und den übrigen g sämtlich von P' ausgehen. Sie liegen daher in der Ebene π', welche in P' zu g' normal ist, und bilden ein Strahlenbüschel um P'. Unter den Loten, die durch P' gehen, befinden sich keine zwei bestimmten Grenzlote: das ganze Büschel von Loten durch P' besteht aus Grenzloten. Dasselbe gilt für die Grenzlote der g''; auch hier sind sämtliche zur g'' gehörigen Lote Grenzlote dieser Geraden, und sie bilden ein Strahlenbüschel um P'' in der zu g'' normalen Ebene π''. Projiziert man nun den zur g' gehörigen Kegelschnitt Φ'^2 in der Richtung der g', so ist der projizierende Cylinder, wie in Nr. 2 gezeigt worden ist, ein Rotationszylinder und sein Durchschnitt mit einer zu g' normalen Ebene ein Kreis. Da π', die Ebene des zu projizierenden Kegelschnitts, auf g' senkrecht steht, so ist Φ'^2 zugleich seine eigene Projektion und daher ein Kreis. Gleiches gilt für den Kegelschnitt Φ''^2, welcher der g'' zugeordnet ist. $P'P''$ ist sowohl zwischen l' und l'' als auch zwischen g' und g'' gemeinsames Lot und trifft die Achsen beider Cylinder. Demnach ist $P'P''$ für jeden der beiden Kreise Φ'^2 und Φ''^2 ein Durchmesser, so dass wir zu dem Ergebnis gelangt sind.

Sind l' und l'' die Achsen der orthogonal-projektiven Ebenenbüschel, welche das orthogonale Hyperboloid in der einen Weise erzeugen, so gehören zu den beiden Geraden g' und g'', die zu den Achsen parallel sind, als Fusspunktkegelschnitte zwei Kreise; dieselben sind in den Ebenen durch die reell schneidende grosse Achse senkrecht zu g' bezw. g'' gelegen und haben diese Achse zum Durchmesser.

Da der Abstand der Grenzpunkte auf einer Geraden gleich dem Abstande der Brennpunkte der zugehörigen Fusspunktsellipse vom Mittelpunkte ist, so konnten wir aus dem Zusammenfallen der Grenzpunkte auf g' und g'' sofort auf zugehörige Kreise schliessen. In den Ebenen π' und π'' liegen zwei singuläre Strahlenbüschel für die Kongruenz der kürzesten Lote. In Nr. 21 hatte sich herausgestellt, dass

die Scheitel der Lotebüschel auf der a-Achse gelegen sind und von dem Mittelpunkte der Fläche den Abstand

$$\frac{1}{a}\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 + c^2)}$$

haben. Da für das orthogonale Hyperboloid die Beziehung gilt: $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0$, so nimmt die Wurzel den Wert a^2 an, d. h. die Scheitel der Büschel sind die Scheitel der a-Achse.

25. Auf dem allgemeinen Hyperboloid bilden die Punkte der Geraden g, von denen nur je ein reelles Lot ausgeht, eine Raumkurve 4. Ordnung 1. Art, welche jede Erzeugende der Fläche in zwei reellen Punkten schneidet. Die Raumkurve muss in dem vorliegenden Falle eine Besonderheit besitzen, da zwei Geraden aus jeder Regelschar sich zu der Kurve anders verhalten, indem sie mit ihr nur je einen Punkt gemein haben. Es entsteht die Frage, ob die Grenzkurve in den Punkten P′ und P″ die Geraden g′ bezw. g″ berührt oder ob diese Punkte für die Kurve Doppelpunkte sind. Es ist unmittelbar klar, dass sich in P′ und P″ auch die Grenzpunkte der Erzeugenden l″ bezw. l′ vereinigt haben. Da zu beiden Regelscharen dieselbe Grenzkurve gehört, so verhält sich die Kurve zu beiden Scharen ganz gleichartig: berührt sie die Geraden g′ und g″, so muss sie auch l′ und l″ berühren. Wenn g′ von der Kurve in P′ berührt wird, so ist die Berührung der R^4_I mit der l″ in demselben Punkte ausgeschlossen, da dies Zusammenfallen von g′ und l″ fordern würde. Mithin ist P′ ein Doppelpunkt der Grenzkurve und ebenso P″: die R^4_I zerfällt in zwei Kegelschnitte, die sich in P′ und P″ treffen.

§ 11.

26. Ist s′ die Polare des unendlich fernen Punktes $\mathfrak{G}'$ von g′ in Bezug auf die absolute Kurve $\mathfrak{K}^2$, so ist bei getrennten Grenzpunkten auf g′ die Involution auf s′ hyperbolisch-gleichseitig, und es sind in ihr je zwei Punkte gepaart, welche von Loten aus demselben Punkte der g′ eingeschnitten werden. Wenn nun die Grenzpunkte in den

Punkt P' fallen, dann sind die unendlich fernen Punkte der Grenzlote, die ja Doppelpunkte der Involution sind, zugleich gepaarte Punkte derselben: die Korrespondenz zwischen den Punkten der g' und der s' ist ausgeartet, und jedes Lot durch einen Punkt der s' ist ein Grenzlot für die g'. Alle diese Grenzlote der g' bilden ein Strahlenbüschel um P' in der zu g' normalen Ebene π'. Ebenso ergibt sich ein Strahlenbüschel von Grenzloten der g'' um den Punkt P'' in der Ebene π'', welche in P'' auf g'' senkrecht steht.

Die Grenzkurve auf dem allgemeinen Hyperboloid wird in dasselbe durch einen Kegel 2. Grades eingeschnitten, der von den Ebenen der Kegelschnitte Φ^2 eingehüllt wird. Da die Grenzkurve des orthogonalen Hyperboloids in zwei Kegelschnitte zerfällt, wie in No. 25 gezeigt worden ist, so geht daraus hervor, dass der Kegel 2. Grades in dem vorliegenden Falle in ein Ebenenpaar ausgeartet ist.

Alle Grenzlote sind Doppelsekanten der Grenzkurve (Nr. 15). Da die zur g' gehörigen Grenzlote in der Ebene π' gelegen sind und jedes von ihnen die R^4_1 zweimal treffen muss, so muss ein Teil der Kurve in der π' verlaufen. Wegen der in der π'' enthaltenen Grenzlote, die der g'' zugehören, muss ein weiterer Bestandteil der R^4_1 in der π'' liegen. Damit ist sie Schnitt der Fläche mit den Ebenen π' und π''. Als diese Schnittkurven haben wir bereits die beiden Kreise gefunden, welche Fusspunktkurven für die Erzeugenden g' und g'' sind, und in sie ist somit die Grenzkurve zerfallen. Wir haben also das Ergebnis:

Die Grenzkurve auf dem orthogonalen Hyperboloid besteht aus den beiden Kreisschnitten, die durch die Fusspunkte des kürzesten Lotes zwischen den Achsen der orthogonal-projektiven Ebenenbüschel gehen.

Nach diesem Satze erhält man die Grenzpunkte auf einer Erzeugenden g in den Schnittpunkten mit den zu g' und g'' gehörigen Φ^2 oder als Fusspunkte der kürzesten Lote zwischen der g und der g' bezw. g''. Demnach sind die gemeinsamen Lote zwischen den Geraden g_0 und g' bezw. g'' die der ersteren zugehörigen Grenzlote. Dass diese zu ein-

ander normal sind, lässt sich bei dieser Fläche leicht folgendermassen direkt zeigen. Es sei also p' sowohl senkrecht zu g_0 als zu g', p'' senkrecht zu g_0 und g''. Daraus folgt $p' \perp (g_0, l')$ und $p'' \perp (g_0, l'')$. Weil g_0 Erzeugende der Fläche und daher $(g_0, l') \perp (g_0, l'')$ ist, so ist $p' \perp p''$.

Sowohl die Grenzlote der Geraden g als auch diejenigen der l verlaufen in den Ebenen π' und π''. Die beiden Arten von Grenzloten verteilen sich in folgender Weise: die Grenzlote, welche zu den Geraden g gehören, bilden die Büschel (P', π') und (P'', π''), diejenigen der Geraden l dagegen die Büschel (P', π'') und (P'', π').

27. Die Lote, welche auf einer festen Geraden g und je einer weiteren Geraden aus derselben Regelschar senkrecht stehen, erzeugen eine Regelfläche 3. Grades, für welche die feste g doppelte Leitgerade ist (Nr. 11). Bei dem orthogonalen Hyperboloid treten interessante Fälle auf, wo diese kubische Regelfläche ausartet. Zu ihnen werden wirgeführt, wenn wir eine der Geraden g', g'', l', l'' als feste Gerade ansehen. Betrachten wir die zur g' gehörige Regelfläche, so haben wir bereits gefunden, dass sich von ihr das Strahlenbüschel (P', π') abspaltet. Um die übrige Fläche zu untersuchen, fassen wir die absolute Polare des unendlich fernen Punktes $\mathfrak{G}'$ von g' ins Auge. Der unendlich ferne Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2$ des orthogonalen Hyperboloids schneidet die absolute Kurve $\mathfrak{K}^2$ in vier Punkten $\mathfrak{G}_1$ bis $\mathfrak{G}_4$. Verbindet man $\mathfrak{G}_1$ mit $\mathfrak{G}_2$ und konstruiert man zu dieser Geraden den Pol in Bezug auf $\mathfrak{K}^2$, so ist er ein Punkt der $\mathfrak{C}^2$ und zwar unendlich ferner Punkt einer Achse der beiden orthogonalprojektiven Ebenenbüschel, welche die Fläche erzeugen, und ihrer parallelen g. Der absolute Pol der Linie $\mathfrak{G}_3\,\mathfrak{G}_4$ ist dann gleichfalls auf $\mathfrak{C}^2$ gelegen, und durch ihn geht die andere ausgezeichnete Achse und ihre parallele g. Die unendlich fernen Punkte der Achsen l' und l'' sind nun $\mathfrak{G}'$ bezw. $\mathfrak{G}''$. Daher ist die absolute Polare von $\mathfrak{G}'$ die Gerade $\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{G}_2 \equiv s'$, diejenige von $\mathfrak{G}''$ die $\mathfrak{G}_3\,\mathfrak{G}_4 \equiv s''$. Also ist s' die unendlich ferne Gerade der Ebene π', s'' diejenige von π''. Durch jeden Punkt der s' geht ein Lot der g'. Hier-

von machen nur die Punkte $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ eine Ausnahme. Um das kürzeste Lot zwischen zwei Geraden zu finden, hat man die absoluten Polaren ihrer unendlich fernen Punkte zu konstruieren und durch deren Schnittpunkt an die gegebenen Geraden die Treffgerade zu ziehen. Ist $\mathfrak{G}_1$ auf der Geraden g_1 der Fläche gelegen, so geht das gemeinsame Lot zwischen g' und g_1 durch den Schnittpunkt der absoluten Polaren von $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}_1$. Das ist der Schnitt der s' mit der Tangente in $\mathfrak{G}_1$ an den $\mathfrak{K}^2$, also der Punkt $\mathfrak{G}_1$. Nun gibt es aber durch $\mathfrak{G}_1$ ein ganzes Büschel von Geraden, welche die g' und die g_1 treffen, nämlich das Strahlenbüschel um $\mathfrak{G}_1$ in der Ebene $(\mathfrak{G}_1, g')$. Ebenso erhält man ein weiteres Büschel von derartigen Loten in der Ebene $(\mathfrak{G}_2, g')$ um den um den Punkt $\mathfrak{G}_2$. Diese beiden Strahlenbüschel bilden zusammen mit dem Büschel der Lote in der Ebene π' die Regelfläche 3. Grades, die der g' zugeordnet ist. In entsprechender Weise findet man, dass die zur g'' gehörige Regelfläche von Loten in die Strahlenbüschel (P'', π''), $(\mathfrak{G}_3, g'')$ und $(\mathfrak{G}_4, g'')$ zerfällt.

§ 12.

28. Die Grenzkurve des Hyperboloids ist für die Fläche der Grenzlote die Orthogonalkurve. Dieser Satz muss auch seine Geltung behalten, wenn die Grenzlotfläche 2. Grades in ein Ebenenpaar ausartet. Im folgenden mögen der Kürze des Ausdrucks halber die zu den Geraden g bezw. l gehörigen Grenzlote als p- bezw. q-Lote bezeichnet werden.

Wir haben bereits gefunden, dass die p-Lote die Büschel (P', π') und (P'', π''), die q-Lote dagegen die Büschel (P', π'') und (P'', π') bilden.

Im allgemeinen Falle treffen sich in jedem Punkte der Grenzkurve zwei Grenzlote p und q unter rechtem Winkel. Es genügt, im folgenden nur den in der Ebene π' gelegenen Bestandteil der Grenzkurve zu betrachten, da alle bei diesem auftretenden Verhältnisse sich ohne weiteres auf den ergänzenden Kurventeil in π'' übertragen lassen. Die Kreislinie K' in π' ist Fusspunktkurve, der g' und der l' zugehörig. Von jedem Punkte von K' gehen somit zwei Lote aus nach

den Punkten P' und P''; in ihnen haben wir zwei Grenzlote verschiedener Art. Es sollen nun je zwei Lote aus den Büscheln P' und P'' einander zugeordnet werden, die nach demselben Punkte von K' hingehen, so dass der Kreis als Erzeugnis der beiden projektiven Büschel aufgefasst ist. Daraus folgt, dass die Büschel der in π' gelegenen Grenzlote gleich sind. Zwei entsprechende Strahlen derselben sind zu einander normal, da die Scheitel der Büschel in den Endpunkten eines Durchmessers liegen.

Aber nicht nur in einerlei Ebene gelegene Grenzlote p und q schneiden sich auf der Grenzkurve rechtwinkelig: auch ein Grenzlot p aus π' trifft eine q der Ebene π'' unter rechtem Winkel, wobei dieses Treffen natürlich nur in dem Punkte P' oder P'' stattfinden kann. Dazu betrachte man die beiden Grenzlote p' und p'', die zu einer Erzeugenden g_i gehören, und zwar möge p' durch P', p'' durch P'' gehen, so dass p' in der Ebene π', p'' dagegen in π'' gelegen ist. Zu p'' gibt es ein paralleles Grenzlot q'', welches als kürzestes Lot zwischen l_i und l'' durch den Punkt P' gehen muss. Während p' in π' liegt, verläuft q'' in π'', aber beide Lote treffen sich in P'. Da $q'' \parallel p''$ und $p'' \perp p'$ ist, so ist $p' \perp q''$, d. h. p' und q'' schneiden sich gleichfalls rechtwinklig.

29. Die Kugel, welche durch die beiden Kreisschnitte möglich ist, ist für das Paar der Kreisschnittebenen die Orthogonalkugel. Weil die Grenzkurve in P' und P'' Doppelpunkte besitzt, so findet in ihnen Berührung zwischen Kugel und Hyperboloid statt. Da $P'P''$ also Durchmesser der Kugel und zugleich a-Achse des Hyperboloids ist, so ergibt sich der Kugelradius als a.

Benutzt man zur Berechnung des Radius die in Nr. 16 abgeleitete Formel, und zwar am besten in der Gestalt: $\frac{(a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2)^2}{4a^2b^2c^2} + a^2$, so wird der Zähler des Bruches wegen der für das orthogonale Hyperboloid geltenden Beziehung: $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0$ zu Null und damit der ganze Ausdruck gleich a^2.

III. Das gleichseitige Hyperboloid.

§ 13.

30. Das gleichseitige Hyperboloid ist dadurch charakterisiert, dass sein unendlich ferner Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2$ Polardreiecken der absoluten Kurve $\mathfrak{K}^2$ umschrieben ist oder, was dasselbe ist, dass auf der Fläche unendlich viele Tripel zu einander rechtwinkliger Erzeugenden aus einer jeden der beiden Regelscharen vorhanden sind. Tritt ein solches Tripel von Erzeugenden auf, so hat dieses sogleich unendlich viele zur Folge. Das gleichseitige Hyperboloid steht insofern dem allgemeinen näher als das orthogonale, als sich bei ihm ebenfalls alle Erzeugenden gleichartig verhalten und keine vor der andern bevorzugt ist. Demgemäss lassen sich die Ergebnisse der Nrn. 1 bis 5 ohne weiteres auf die vorliegende Fläche übertragen. Man erhält ausnahmslos auf jeder Geraden zwei durch endliche Strecken von einander getrennte Punkte, von denen nur je ein reelles Lot ausgeht, das eine zweite Gerade derselben Schar rechtwinklig schneidet. Fasst man von den unendlich vielen Tripeln zu einander normaler Erzeugenden aus der Regelschar L ein derartiges Tripel l_0, l', l'' auf, so gibt es drei zu ihnen parallele Erzeugenden g_0, g', g'', die ebenfalls ein solches Tripel bilden. Da nun g_0 wegen der Normalität zu g' und g'' auch zu l' und l'' senkrecht ist und diese Geraden schneidet, so ist g_0 kürzestes Lot zwischen l' und l''. Somit ist jede g gemeinsames Lot zweier Geraden l, d. h. von jeder g gehen zwei zu ihr normale Geraden l aus, die anderseits auch zu einander normal sind. Betrachtet man die Gerade g_0 und die beiden zu ihr senkrechten Geraden l' und l'', so sind l' und l'' zugleich gemeinsame Lote zwischen g_0 und g'' bezw. g'. Ich behaupte nun, dass l' sogar ein Grenzlot für die g_0 ist. Angenommen, der Punkt (g_0, l') wäre noch Fusspunkt für ein zweites Lot p_1, welches auf der Geraden g_1 normal sein möge. Diese g_1 kann nicht mit g' identisch sein, da l'' gemeinsames Lot zwischen g_0 und g' ist und l'' dann die l' treffen würde. Weil l' und p_1 die g_1 schneiden, so würde

die Ebene (l', p_1) mit der g_1 zwei und daher alle Punkte dieser Geraden gemein haben, d. h. g_0 wäre noch zu der g_1 normal ausser g' und g''. Eine Gerade g eines Hyperboloids kann jedoch nicht gleichzeitig zu drei anderen Geraden aus derselben Schar normal sein. Mithin kommt von dem Punkte (g_0, l') kein weiteres Lot ausser $l' : l'$ ist ein Grenzlot der g_0. In analoger Weise zeigt man, dass l'' das andere ist. Demnach gehören zu jeder g zwei l als Grenzlote. Jeder Grenzpunkt ist damit zugleich ein Punkt, in dem sich zwei Erzeugenden der Fläche unter rechtem Winkel schneiden, also ein Punkt der Orthogonalkurve. Ergebnis:

Bei dem gleichseitigen Hyperboloid ist die Grenzkurve identisch mit der Orthogonalkurve.

Wir können demgemäss die Orthogonalkurve dieser Fläche auch definieren als Ort aller Punkte, durch welche nur je ein Fusspunktkegelschnitt Φ^2 geht.

31. Die gemeinsamen Lote zwischen g_0 und den übrigen Geraden g erzeugen eine Regelfläche 3. Grades. Die Kuspidalerzeugenden derselben sind die beiden der g_0 zugehörigen Grenzlote, also in dem jetzigen Falle die beiden zur g_0 senkrechten Erzeugenden l. Hier ist ohne weiteres klar, dass jedes Grenzlot Sehne der Grenzkurve ist. Da die beiden Arten von Grenzloten, sowohl die der Geraden g als der l, auf dem gegebenen Hyperboloid verlaufen, so ist dies die von ihnen erzeugte Fläche, so dass man hat:

Das gleichseitige Hyperboloid ist seine eigene Grenzlotfläche.

§ 14.

32. Die zu einer g gehörigen Lote haben ihre unendlich fernen Punkte auf der absoluten Polare s des unendlich fernen Punktes dieser g. Die Doppelpunkte der Involution auf s haben sich in Nr. 20 ergeben als Schnittpunkte derselben mit dem unendlich fernen Kegelschnitt $\mathfrak{D}^2$ der Grenzlotfläche. Da bei dem gleichseitigen Hyperboloid die Fläche der Grenzlote identisch ist mit der Grundfläche, so ist $\mathfrak{D}^2 = \mathfrak{S}^2$; $\mathfrak{S}^2$ ist Ort der Doppelpunkte für die hyperbolisch-gleich-

seitigen Involutionen auf den absoluten Polaren der Punkte von $\mathfrak{C}^2$.

Da die Grenzkurve mit der Orthogonalkurve identisch ist, so wird sie durch die Orthogonalkugel des Hyperboloids in dasselbe eingeschnitten. Ihr Radius ist bestimmt durch: $\rho^2 = a^2 + b^2 - c^2$. Zwischen den Achsen des gleichseitigen Hyperboloids besteht ein Zusammenhang, der ausgedrückt ist durch: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0$. Da also $c < b < a$ ist, so ist ρ^2 stets positiv, die Kugel mithin immer reell. Weil der Radius grösser als a ist, so folgt daraus die unbedingte Realität der Grenzkurve.

Zieht man zur Berechnung des Radius die Formel heran: $r^2 = \frac{(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)^2}{4a^2b^2c^2} - c^2$ und gibt man ihr die Gestalt: $r^2 = a^2 + b^2 - c^2 + \frac{(a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2)^2}{4a^2b^2c^2}$, so ist wegen der Beziehung: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0$ der Zähler des auftretenden Bruches gleich Null, und man bekommt daher

$$r^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

IV. Das einmantlige Rotationshyperboloid.

§ 15.

33. Während im allgemeinen jede Regelschar eines Hyperboloids ihre eigene Striktionslinie besitzt, d. h. der Zentralpunkt einer g nicht auch Zentralpunkt einer l ist, haben bei dem Rotationshyperboloid beide Regelscharen dieselbe Striktionslinie, den Kehlkreis der Fläche. Die Endpunkte eines Durchmessers dieses kleinsten Kreises sind Zentralpunkte paralleler Erzeugenden. Da der einer Erzeugenden zugeordnete Kegelschnitt Φ^2 sowohl deren Zentralpunkt enthält als auch denjenigen der parallelen Erzeugenden, so schneiden die Ebenen sämtlicher Φ^2 in die Ebene des

Kehlkreises alle möglichen Durchmesser ein. Jeder Punkt des Kehlkreises ist Zentralpunkt für die beiden durch ihn gehenden Erzeugenden. In jedem Durchmesser schneiden sich die Ebenen von zwei Fusspunktkegelschnitten. Durch den Zentralpunkt P_0 der g_0 möge noch die Gerade l_1 gehen, so dass der Zentralpunkt P_0' der l_0 zugleich Zentralpunkt für die g_1 ist. Da P_0' Punkt des Φ_0^2 und des Φ_1^2 ist, so geht durch ihn sowohl das kürzeste Lot zwischen g_0 und g_1 als auch dasjenige zwischen l_0 und l_1. Ebenso ist P_0 als Punkt derselben Kegelschnitte Fusspunkt der gemeisamen Lote zwischen g_0 und g_1 und zwischen l_0 und l_1. Demnach ist P_0P_0' normal zu g_0, g_1, l_0 und l_1. Wir haben also das Ergebnis:

Jeder Durchmesser des Kehlkreises ist sowohl kürzestes Lot zwischen zwei g als auch zwischen zwei l.

In der Ebene des Kehlkreises besteht somit ein ganzes Büschel von gemeinsamen Loten zwischen je zwei Geraden g und je zwei Geraden l, dessen Scheitel der Flächenmittelpunkt ist. Wir erhalten daher in der Kehlkreisebene eine singuläre Ebene der Kongruenzen $(3,2)$, welche von den Geraden der kürzesten Entfernung zwischen je zwei g bezw. je zwei l gebildet werden. Das folgt auch unmittelbar aus dem allgemeinen Fall (Nr. 21), wo sich zwei Strahlenbüschel von Kongruenzgeraden ergeben haben, die in den Kreisschnittebenen durch die a-Achse gelegen sind und ihre Scheitel auf dieser Achse zu beiten Seiten des Flächenmittelpunktes in der Entfernung $d = \frac{1}{a}\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 + c^2)}$ haben. Bei dem Rotationshyperboloid vereinigen sich jedoch diese beiden Kreisebenen in der Ebene des Kehlkreises, und da die reell schneidenden Achsen a und b einander gleich sind, so wird $d = 0$, und die beiden Scheitel der Strahlenbüschel fallen daher in den Mittelpunkt der Fläche.

34. Der Radius der Kugel, welche die Grenzkurve in das Hyperboloid einschneidet, ist gegeben durch: $r^2 = \frac{(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)^2}{4a^2b^2c^2} - c^2$. Da die Durchmesser nach

den Punkten der Grenzkurve grosse Achsen für die verschiedenen Ellipsen Φ^2 sind, so haben diese letzteren durchgehends grosse Achsen von derselben Länge, und zwar gleich dem doppelten Radius der Kugel, auf welcher die Grenzkurve verläuft. Bei dem Rotationshyperboloid ist diese konstante Achse gleich $2a\sqrt{\frac{a^2}{4c^2}+1}$. Die kleine Achse der Ellipse, welche einer g zugehört, ist gleich dem Abstande der g von ihrer parallelen l, also gleich einem Durchmesser des Kehlkreises. Daraus geht hervor, dass alle Ellipsen Φ^2 auf dem Rotationshyperboloid auch eine konstante kleine Achse besitzen; dieselbe ist 2a. Somit ergibt sich:

Die Fusspunktsellipsen Φ^2, welche den Erzeugenden des Rotationshyperboloids zugehören, besitzen konstante Achsen.

Weil alle Φ^2 dieselben Achsenlängen haben, so besitzen sie die gleiche Exzentrizität. Die Grösse der letzteren bezeichnet aber zugleich die Länge der Strecke zwischen den Grenzpunkten einer Geraden. Diese Strecken auf allen Geraden sind daher einander gleich, und die Grenzkurve besteht aus zwei Parallelkreisen, die zu beiden Seiten der Kehlkreisebene in gleicher Entfernung verlaufen. Da diese Kurve für die Grenzlotfläche die Orthogonalkurve ist und dieselbe nur bei dem Rotationshyperboloid derartig zerfällt, so müssen die Grenzlote eine solche Fläche erzeugen; wie wir bereits in Nr. 19 erkannt haben, ist sie mit der gegebenen konzentrisch und koaxial. Der Abstand der beiden Parallelkreise, aus denen die Grenzkurve besteht, von der Ebene des Kehlkreises stellt sich heraus als $\frac{a^2}{2c}$.

V. Das hyperbolische Paraboloid.

§ 16.

35. Ein ganz anderes Verhalten als die Hyperboloide zeigt das hyperbolische Paraboloid und sein Spezialfall, das gleichseitig-hyperbolische Paraboloid, und dies hat seinen Grund darin, dass die letzteren in ihren unendlich fernen

Erzeugenden Elemente besitzen, für welche die Lote unbestimmt werden. Alle Geraden der Regelschar G liegen in den Ebenen eines Parallelebenenbüschels um die Gerade l_∞, die Erzeugenden l in denjenigen des Büschels g_∞. Es sei γ eine von den Leitebenen der G-Schar. Wir betrachten das kürzeste Lot p_1 zwischen den Geraden g_0 und g_1. Da p_1 auf g_0 und g_1 senkrecht steht, so ist es senkrecht zu der Ebene γ, die ja zu beiden Geraden parallel ist. Lässt man die g_1 die Regelschar G durchlaufen, während man in jeder ihrer Lagen das gemeinsame Lot konstruiert zwischen ihr und der festen g_0, so stehen alle diese Lote auf der γ senkrecht. Da sie sämtlich die g_0 treffen, so sind sie in der Ebene gelegen, welche durch g_0 geht und zu γ normal ist. Daher ist der Ort der Fusspunkte auf den verschiedenen Geraden g ganz in der Ebene ε_0 enthalten, die man durch g_0 senkrecht zu γ legt. Da die ε_0 mit dem Paraboloid bereits die Gerade g_0 gemein hat, so ergibt sich als Ort der Fusspunkte der zu g_0 gehörigen Lote anf den Geraden der Fläche eine zweite Gerade $\bar{l}_0$.

Jeder Erzeugenden einer Fläche war bisher als Ort der Fusspunkte der zu ihr gehörigen Lote ein Kegelschnitt zugeordnet, während wir hier nur zu einer einzigen Geraden geführt werden. Es entsteht nun die Frage nach derjenigen Geraden, welche die Fusspunktsgerade $\bar{l}_0$ der g_0 zum vollen Kegelschnitt ergänzt, der doch eigentlich zu erwarten ist. Dazu gehen wir auf das involutorische Ebenenbüschel um g_0 zurück, dessen Ebenen die zur g_0 gehörigen Lote enthalten. Das Büschel um g_0 schneidet in die absolute Polare s_0 des unendlich fernen Punktes $\mathfrak{G}_0$ von g_0 eine Involution ein. In ihr sind bekanntlich je zwei Punkte gepaart, welche auf Loten aus demselben Punkte der g_0 gelegen sind. Durch jeden Punkt der s_0 geht eines dieser Lote und trifft in ihm die absolute Polare des unendlich fernen Punktes derjenigen zweiten g, welche von ihm unter rechtem Winkel geschnitten wird. Die absoluten Polaren der unendlich fernen Punkte der Erzeugenden g bilden ein Strahlenbüschel um den absoluten Pol $\mathfrak{P}_1$ der l_∞. Mithin schneiden die absoluten

Polaren aller Punkte $\mathfrak{G}$ in die s_0 denselben Punkt $\mathfrak{P}_1$ ein, nach welchem demzufolge unendlich viele Lote hingehen. Jedes von ihnen ist normal zu der g_0 und einer zweiten g. In ihnen erkennen wir die vorhin gefundenen Lote in der Ebene ε_0. Da nach $\mathfrak{P}_1$ von jedem Punkte der g_0 ein Lot kommt, so ist von jedem Paare der Involution auf s_0 ein Punkt in den $\mathfrak{P}_1$ gerückt, und demnach haben sich auch die beiden Doppelpunkte in diesem Punkte vereinigt: die Involution ist parabolisch. Nach einem beliebigen Punkte X von s_0 geht das kürzeste Lot zwischen g_0 und derjenigen g, welche von der absoluten Polare von X getroffen wird. Da X auf der absoluten Polare von $\mathfrak{G}_0$ liegt, so enthält die Polare von X den Punkt $\mathfrak{G}_0$, trifft aber keine weitere im Endlichen verlaufende Erzeugende. Dagegen begegnet sie noch der Geraden g_∞, und sie ist als die zweite Erzeugende zu betrachten, auf welcher das Lot durch X senkrecht steht. Wie für das Lot nach X, so lässt sich ganz dasselbe für jedes andere Lot beweisen, das durch einen von $\mathfrak{P}_1$ verschiedenen Punkt der s_0 geht. Alle derartigen Lote sind kürzeste Lote zwischen g_0 und g_∞. Sie bilden einen Strahlenbüschel in der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}$ um den Punkt $\mathfrak{G}_0$. Da durch jeden Punkt der g_∞ ein Strahl des Büschels geht, so ist jeder Punkt derselben Fusspunkt für ein zur g_0 gehöriges Lot, d. h. g_∞ gehört zu dem der g_0 zugeordneten Kegelschnitt $\Phi^2{}_0$. Wir haben demnach das Ergebnis:

Der einer Erzeugenden g_0 des hyperbolischen Paraboloids zugehörige Fusspunktkegelschnitt besteht aus derjenigen l, welche in der Ebene durch g_0 und den absoluten Pol der l_∞ gelegen ist, und aus der g_∞.

36. Ebenso wie g_∞ die $\bar{l}_0$ zum vollständigen Fusspunktkegelschnitt $\Phi^2{}_0$ ergänzt, so bildet sie auch einen Teil jedes anderen Φ^2. Alle Φ^2 haben somit die Gerade g_∞ gemeinsam. Die Ebenen der Kegelschnitte, welche den Geraden g zugeordnet sind, bilden also ein Parallelebenenbüschel um g_∞, und in entsprechender Weise gelangt man, von den Erzeugenden l ausgehend, zu einem Ebenenbüschel um l_∞.

§ 17.

37. Der zur Geraden g_0 gehörige Kegelschnitt besteht aus der im Endlichen verlaufenden $\bar{l}_0$ und der unendlich fernen g_∞. Fasst man bei allen Kegelschnitten nur den endlichen eigentlichen Bestandteil auf, so ist jeder Erzeugenden g diejenige l zugeordnet, welche in der Ebene liegt, die durch diese g senkrecht zu den Leitebenen der G-Schar gelegt ist. So gehört der Geraden g_0 die l_0 als Fusspunktsgerade zu. Sucht man nun die Fusspunktsgerade dieser $\bar{l}_0$ auf, so entsteht die Frage, ob man da wieder zu der Ausgangsgeraden g_0 oder einer von ihr verschiedenen g gelangen wird. Die g_0 ist mit ihrer $\bar{l}_0$ in der Ebene ε_0 gelegen, welche zu γ, einer der Leitebenen der Regelschar G, normal ist. Die Fusspunktsgerade $\bar{g}_0$, welche der $\bar{l}_0$ entspricht, wird aus dem Paraboloid ausgeschnitten durch die Ebene ε', welche die $\bar{l}_0$ enthält und auf einer Leitebene λ der L-Schar senkrecht steht. Diese neue Gerade der G-Schar ist von g_0 verschieden. Es wäre die g_0 nur dann, wenn $\gamma \parallel \lambda$ sein würde, was jedoch unmöglich ist. Somit ist jeder Erzeugenden g eine und nur eine aus der L-Schar zugeordnet, und anderseits gehört jeder l wiederum nur eine g als Fusspunktsgerade zu: die Zuordnungen sind demnach Projektivitäten, aber keineswegs involutorisch.

38. Die Ebene ε_0, welche die g_0 mit ihrer Fusspunktsgeraden l_0 verbindet, enthält ∞^1 gemeinsame Lote zwischen der g_0 und den übrigen g, und zwar haben die Lote in dieser Ebene als unendlich fernen Punkt den absoluten Pol $\mathfrak{P}_l$ der l_∞. Somit verbindet ε_0 die Gerade g_0 mit dem Punkte $\mathfrak{P}_l$. Ebenso enthält jede Ebene, welche eine l mit ihrer Fusspunktsgeraden verbindet, den Pol P_g der g_∞ in Bezug auf die absolute Kurve. Auf diese Weise ergeben sich zwei einfach unendliche Mannigfaltigkeiten von Ebenen durch die Punkte $\mathfrak{P}_g$ und $\mathfrak{P}_l$. Wir können also das Ergebnis aussprechen:

Verbindet man die absoluten Pole der unendlich fernen Erzeugenden des hyperbolischen Paraboloids je mit den Geraden der Schar, welcher die Erzeugende nicht angehört, durch

Ebenen, so liegt jede Gerade dieser Schar mit ihrer Fusspunktsgeraden in derselben Ebene.

Nunmehr ist es möglich, die Frage zu erledigen, welche Fusspunktsgerade der unendlich fernen Geraden g_∞ zugehört. Da jede Erzeugende g mit der zugeordneten l in einer Ebene durch den absoluten Pol $\mathfrak{P}_l$ der l_∞ gelegen ist, so befindet sich die Fusspunktsgerade der g_∞ in der Verbindungsebene des $\mathfrak{P}_l$ mit der g_∞, also in der unendlich fernen Ebene $\mathfrak{E}$. Das ist demnach die Gerade l_∞. Die Ebene $\mathfrak{E}$ verbindet aber zugleich den absoluten Pol $\mathfrak{P}_g$ der g_∞ mit der l_∞, und daher schneidet sie die Fusspunktsgerade g_∞ der l_∞ aus der Fläche aus. Somit besitzen unter allen Erzeugenden des Paraboloids allein die unendlich fernen Geraden die Eigenschaft, dass die eine die Fusspunktsgerade der andern ist.

39. Der Schnitt der beiden Geraden g_0 und l_0 ist ein ausgezeichneter Punkt der g_0. In dem unendlich fernen Punkte $\mathfrak{G}_0$ von g_0 berührt die Ebene (g_0, l_∞). Da diese Ebene die unendlich fernen Punkte aller g enthält, so ist sie Leitebene für die Regelschar G. Die im Zentralpunkte der g_0 tangierende Ebene ist zu der (g_0, l_∞) normal. Nun gibt es aber durch g_0 nur eine Ebene, welche auf den Leitebenen der G-Schar senkrecht steht, und daher sind die beiden Ebenen ε_0 und die im Zentralpunkt von g_0 berührende identisch. Damit erkennen wir in dem Punkte (g_0, l_0) den Zentralpunkt der g_0, so dass auch hier der einer Erzeugenden zugeordnete Kegelschnitt durch deren Zentralpunkt geht. Für den vorliegenden Fall sprechen wir das Ergebnis folgendermassen aus:

Die Fusspunktsgerade einer Erzeugenden des hyperbolischen Paraboloids geht durch den Zentralpunkt der letzteren.

Daraus ist unmittelbar ersichtlich, dass keine der beiden Zuordnungen von Geraden der einen und der andern Schar involutorisch sein kann. Denn im allgemeinen haben zwei Geraden aus verschiedenen Scharen nicht denselben Zentralpunkt.

40. In Nr. 38 haben wir ∞^1 Tangentialebenen des Paraboloids erhalten, welche eine g mit ihrer Fusspunkts-

geraden verbinden und den absoluten Pol $\mathfrak{P}_1$ der l_∞ enthalten. Alle diese Ebenen sind Berührungsebenen des Tangentialcylinders aus $\mathfrak{P}_1$ an das Paraboloid. Die Berührungspunkte sind, wie sich soeben ergeben hat, die Zentralpunkte der Geraden g. Die Erzeugenden des aus $\mathfrak{P}_1$ an die Fläche kommenden — bekanntlich parabolischen — Cylinders sind die Verbindungsgeraden des $\mathfrak{P}_1$ mit den Zentralpunkten der g. Da somit die Gesamtheit dieser Zentralpunkte auch auf dem Cylinder gelegen ist, der von den Tangentialebenen aus $\mathfrak{P}_1$ eingehüllt wird, so wird das Paraboloid von dem Cylinder aus $\mathfrak{P}_1$ längs der von den Zentralpunkten gebildeten Kurve berührt. Der Ort der Zentralpunkte für die Erzeugenden g ist eine Parabel. Wir haben also das Ergebnis gewonnen:

Die Ebenen, welche eine Erzeugende g mit ihrer Fusspunktsgeraden l verbinden, umhüllen einen parabolischen Cylinder, der das Paraboloid längs der Striktionslinie der Regelschar G berührt.

§ 18.

41. Die zu einer Erzeugenden g_0 gehörigen Lote erzeugen im allgemeinen Falle eine Regelfläche 3. Grades, für welche die g_0 doppelte Leitgerade ist. Jede Gerade dieser Fläche ist gemeinsames Lot zwischen der g_0 und je einer weiteren g. Das kürzeste Lot zwischen zwei Geraden erhält man, indem man zu den unendlich fernen Punkten derselben die absoluten Polaren aufsucht und durch deren Schnittpunkt die Treffgerade an die gegebenen Geraden legt. Diese Treffgerade ist ein eigentliches Lot, wenn die gegebenen Geraden im Endlichen verlaufen. Ist dagegen eine von ihnen in der unendlich fernen Ebene gelegen, so wird man zu Loten geführt, die man als uneigentliche bezeichnen kann. Beide Arten von Loten ergeben sich bei dem hyperbolischen Paraboloid. Die eigentlichen Lote, die zu der Geraden g_0 gehören, bilden, wie in Nr. 35 gezeigt worden ist, das Strahlenbüschel $(\mathfrak{P}_1, g_0)$. Die uneigentlichen Lote zwischen g_0 und g_∞ findet man folgendermassen. Die absolute Polare des unendlich fernen Punktes $\mathfrak{G}_0$ von g_0 sei s_0. Da die g_∞

unendlich viele unendlich ferne Punkte besitzt, so gelangt man zu einem ganzen Büschel von absoluten Polaren s_∞, dessen Scheitel der absolute Pol $\mathfrak{P}_g$ der g_∞ ist. Durch jeden Punkt der s_0 geht somit eine s_∞. Jede Gerade, welche $\mathfrak{G}_0$ mit einem Punkte der s_0 verbindet, ist dann ein gemeinsames Lot zwischen g_0 und g_∞, da ja beide Geraden von ihr geschnitten werden. Wir werden also zu einem Büschel von uneigentlichen Loten der g_0 geführt, die durch $\mathfrak{G}_0$ gehen und in der Ebene $\mathfrak{E}$ verlaufen. Aber damit sind die Lote zwischen g_0 und g_∞ noch nicht erschöpft. Da der Punkt (s_0, g_∞) zugleich Schnittpunkt der s_0 mit einer s ist, so trifft jede Gerade durch ihn an die g_0 auch die g_∞ und ist daher ein gemeinsames Lot zwischen beiden. Deren gibt es ein ganzes Büschel um den Punkt (s_0, g_∞) in der Ebene, welche diesen Punkt mit der g_0 verbindet. Dieses dritte Büschel von Loten ergänzt die Büschel $(\mathfrak{P}_1, g_0)$ und $(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{E})$ zu der vollständigen Regelfläche 3. Grades der zur g_0 gehörigen Lote.

42. Die kürzesten Lote zwischen je zwei Geraden einer Regelschar G bilden eine Kongruenz 3. Ordnung 2. Klasse (Nr. 12). Ist die G jedoch eine paraboloidische Regelschar, so tritt ein Zerfallen der Kongruenz in folgender Weise ein. Da die zu der g_0 gehörigen eigentlichen Lote ein Strahlenbüschel um den absoluten Pol $\mathfrak{P}_1$ der l_∞ bilden, so ergibt sich, wenn die g_0 die ganze Regelschar durchläuft, ein Bündel von eigentlichen Loten der Kongruenz; sein Scheitel ist $\mathfrak{P}_1$. Von den zu der g_0 gehörigen uneigentlichen Loten werden die einen dargestellt durch die Strahlen des Büschels um den Punkt $\mathfrak{G}_0$ in der unendlich fernen Ebene. Durchläuft nun die Gerade die Regelschar, so durchläuft der Scheitel $\mathfrak{G}_0$ des Büschels die l_∞, und mithin erfüllen die Lote dieser Art die unendlich ferne Ebene. Die zweite Gruppe von uneigentlichen Loten der g_0 wird von den Strahlen des Büschels um (s_0, g_∞) gebildet in der Ebene, welche diesen Punkt mit der g_0 verbindet. Durchläuft nun die g_0 die G-Schar, so durchläuft die absolute Polare s_0 des unendlich fernen Punktes $\mathfrak{G}_0$ das Strahlenbüschel P_1. Demnach ist jeder Punkt der g_∞ Scheitel eines Büschels von uneigentlichen

Loten. Ist (s', g_∞) einer dieser Punkte, so ist er Scheitel eines solchen Büschels, und die Ebene des letzteren verbindet den Punkt (s', g_∞) mit derjenigen Geraden g, deren unendlich ferner Punkt der absolute Pol der s' ist. Alle Lote in diesen verschiedenen Ebenen schneiden die darin gelegenen g rechtwinklig und sind zu einander parallel. Ihr unendlich ferner Punkt ist allen Ebenen gemein, und da sie Berührungsebenen der Fläche sind, so umhüllen sie einen Tangentialcylinder des Paraboloids, welcher von der g_∞ berührt wird. Die Strahlen der gesuchten Kongruenz liegen in den Berührungsebenen des Zylinders und treffen die g_∞. Das ist ein Spezialfall des folgenden: Es liegt ein Kegel 2. Grades vor und eine ihn tangierende Gerade g; man legt in jeder Tangentialebene des Kegels das Strahlenbüschel um den Spurpunkt der Geraden g. Betrachtet man einen beliebigen Punkt P, so kommen von ihm zwei Berührungsebenen an den Kegel, und in jeder dieser Ebenen gibt es eine Gerade der Kongruenz, welche durch P geht, die Verbindungslinie des P mit dem Spurpunkte der g: die Kongruenz ist von der zweiten Ordnung. Eine Ebene π schneidet die g in einem Punkte S, und durch ihn geht eine von der g enthaltenden verschiedene Tangentialebene des Kegels. Die Schnittlinie dieser Ebene mit der π ist ein Kongruenzstrahl, und zwar der einzige in π. Daraus folgt die Klasse 1 der Kongruenz[1]). Wendet man dieses Ergebnis auf den vor-

[1]) Vgl. das duale Problem in Sturm, Liniengeometrie, Nr. 310: Alle Geraden, welche einem Kegelschnitte und einer ihn einmal treffenden Geraden gleichzeitig und zwar in getrennten Punkten begegnen, erzeugen eine Kongruenz 1. Ordnung 2. Klasse.

Andererseits findet sich die behandelte Kongruenz (2,1) als Spezialfall in der Nr. 487 desselben Werkes erwähnten Kongruenz (2,2) derjenigen Strahlen, welche eine Fläche 2. Grades berühren und zugleich eine beliebige Gerade schneiden. Wenn nämlich die Fläche ein Kegel 2. Grades wird und die Gerade diesen Kegel berührt, so spaltet sich von der Kongruenz (2,2) ein Strahlenfeld ab; die Ebene desselben ist die Tangentialebene durch die gegebene Gerade an den Kegel. Nach Abzug des Strahlenfeldes ergibt sich obige Kongruenz (2,1).

liegenden Fall an, so ergibt sich als Erzeugnis der dritten Gruppe von Loten eine Kongruenz (2,1). Wenn also eine paraboloidische Regelschar G vorliegt, so zerfällt die Kongruenz (3,2) der kürzesten Lote zwischen je zwei Geraden g derselben: 1. in den Bündel der eigentlichen Lote durch den absoluten Pol $\mathfrak{P}_1$ der l_∞, 2. in das unendlich ferne Strahlenfeld und 3. in eine Kongruenz (2,1).

VI. Das gleichseitig-hyperbolische Paraboloid.

§ 19.

33. Bei dem gleichseitig-hyperbolischen Paraboloid stehen die Leitebenen der einen Regelschar auf denjenigen der andern senkrecht. Die kürzesten Lote zwischen einer Erzeugenden g_0 und den übrigen g liegen in der Ebene durch g_0 senkrecht zu γ, einer der Leitebenen für die G-Schar. Da λ, eine Leitebene der l, gleichfalls zur γ normal ist, so stehen beide Ebenen auf der γ senkrecht, und sie schneiden sich in einer Geraden, welche parallel ist zu derjenigen l, die aus der Fläche ausgeschnitten wird von der Ebene durch g_0 senkrecht zur γ. Diese Gerade, die mit l_s bezeichnet werden möge, ist eine ausgezeichnete Erzeugende des Paraboloids. Denn da sie der L-Schar angehört, so ist sie parallel der λ; ausserdem ist sie in einer zweiten Ebene senkrecht zu γ gelegen. Sie muss also diejenige l sein, welche normal ist zu γ und daher zu allen Geraden g.

44. Ist nun die l_s die einzige Gerade der L-Schar, die gemeinsames Lot ist zwischen zwei Geraden g? Jedes kürzeste Lot zwischen zwei g, behaupte ich, fällt in eine Erzeugende l. Dazu betrachten wir das Lot P_0P_1 zwischen g_0 und g_1. Die unendlich fernen Punkte $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_1$ von g_0 bezw. g_1 liegen auf der unendlich fernen Geraden l_∞, und in ihr schneiden sich daher die Ebenen, welche man durch jede der beiden Geraden parallel zu der andern legt. Errichtet man nun auf diesen Ebenen $(g_0, \mathfrak{G}_1)$ und $(g_1, \mathfrak{G}_0)$ in g_0 und g_1 die senkrechten Ebenen, so schneiden sich dieselben in der Geraden P_0P_1. Beide Ebenen sind Leitebenen

der L-Schar, und daher trifft die P_0P_1 die Gerade g_∞. Weil die P_0P_1 also die drei Geraden g_0, g_1 und g_∞ der Regelschar G schneidet, so muss sie der verbundenen Regelschar angehören. Demnach sind alle kürzesten Lote zwischen den Geraden g Erzeugende aus der L-Schar, also auch die zur g_0 gehörigen Lote, welche auf einer zweiten Geraden g senkrecht sind. Dieselben sind sämtlich in der Ebene durch g_0 senkrecht zu γ enthalten. Wenn nun jedes dieser Lote mit einer Erzeugenden l zusammenfallen würde, so lägen alle l in einer Ebene, was nicht möglich ist. Alle Lote, die auf der g_0 und einer anderen g normal sind, können sich daher nur in eine einzige l vereinigen, welche dann natürlich die Fusspunkte aller Lote auf den verschiedenen g in sich enthalten muss. Eine derartige Erzeugende haben wir bereits in der ausgezeichneten l_s gefunden. Dieselbe schneidet demgemäss alle g unter rechtem Winkel, ist also ein Teil der Orthogonalkurve. Da diese aus den beiden Scheitelerzeugenden der Fläche besteht, so erkennen wir in der l_s die Scheitelerzeugende aus der L-Schar.

45. Da die Leitebenen des Paraboloids zu einander normal sind, so sind die unendlich fernen Geraden g_∞ und l_∞ zu einander konjugiert in Bezug auf die absolute Kurve, d. h. der Pol der einen ist auf der andern gelegen. Der unendlich ferne Punkt der Geraden l_s ist wegen ihrer Normalität zu allen g zu allen Punkten der l_∞ konjugiert in Bezug auf den $\Re^2$, woraus folgt, dass l_s durch den absoluten Pol der l_∞ geht. Jeder Punkt der g_∞ ist, wie in dem Falle des allgemeinen Paraboloids, Fusspunkt für ein zu g_0 gehöriges Lot, und der Kegelschnitt Φ_0^2, welcher der g_0 zugeordnet ist, setzt sich demnach zusammen aus der l_s und der unendlich fernen Geraden g_∞. Da alle Φ^2 jetzt ausser dem unendlich Bestandteil auch noch die im Endlichen verlaufende l_s gemeinsam haben, so kommen wir zu dem Ergebnis:

Die Geraden einer Regelschar des gleichseitig-hyperbolischen Paraboloids haben stets denselben Fusspunktkegelschnitt; er besteht aus der unendlich fernen Geraden derselben und aus der Scheitelerzeugenden der andern Schar.

Ordnet man jeder Erzeugenden g ihre Fusspunktsgerade zu und verbindet man beide durch eine Ebene, so geht diese durch den absoluten Pol $\mathfrak{P}_l$ der Geraden l_∞. Alle derartigen Ebenen umhüllen bei dem allgemeinen Paraboloid einen parabolischen Zylinder, der die Fläche längs der Striktionslinie der Regelschar G berührt. Die Tangentialebenen durch den Punkt $\mathfrak{P}_l$ haben bei dem gleichseitigen Paraboloid die Scheitelerzeugende l_s gemeinsam und bilden daher einen Ebenenbüschel, der die Fläche gleichfalls längs der Striktionslinie der G-Schar berührt, nämlich in den Punkten der Geraden l_s.

§ 20.

46. Es soll nun die Gesamtheit der Lote betrachtet werden, welche einer Geraden g_0 zugehören und die im allgemeinen Falle eine Regelfläche 3. Grades erzeugen. Da die absoluten Polaren der unendlich fernen Punkte $\mathfrak{G}$ ein Strahlenbüschel um den absoluten Pol der l_∞ bilden, so sind alle Geraden durch $\mathfrak{P}_l$, welche die g_0 und je eine zweite g treffen, parallel und bilden das bereits bekannte Büschel der eigentlichen Lote der g_0. Die uneigentlichen Lote gewinnt man in folgender Weise. Die absolute Polare s_0 des unendlich fernen Punktes $\mathfrak{G}_0$ von g_0 geht durch den Punkt $\mathfrak{P}_l$ der l_∞. Die absoluten Polaren s_∞ der Punkte von g_∞ bilden ein Büschel um den absoluten Pol $\mathfrak{P}_g$ der g_∞. Da durch jeden Punkt der s_0 eine von diesen s_∞ geht, so hat man in jedem Strahl, der einen Punkt der s_0 mit $\mathfrak{G}_0$ verbindet, ein gemeinsames Lot zwischen g_0 und g_∞. Wir erhalten also ein Büschel von solchen Loten um $\mathfrak{G}_0$ in der Ebene $\mathfrak{E}$. Eine von den Geraden s_∞ geht durch den Punkt $\mathfrak{P}_l$, so dass sich in diesem die Geraden g_∞, s_0 und s_∞ schneiden. Daher ist jeder Strahl des Büschels um P_l in der Ebene $(\mathfrak{P}_l, g_0)$ ein gemeinsames Lot zwischen g_0 und g_∞. Dieses Strahlenbüschel hat sich aber bereits als Büschel von eigentlichen Loten der g_0 ergeben: das Büschel ist somit doppelt zu nehmen, und die zur g_0 gehörige Regelfläche zerfällt in das doppelte

Strahlenbüschel (P_1, g_0) mit l_s als einzigem eigentlichen Lote und in das Strahlenbüschel ($\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{E}$).

47. Durchwandert g_0 die Regelschar G, so beschreibt die Gerade s_0 das Strahlenbüschel um $\mathfrak{P}_1$, und jede Gerade durch $\mathfrak{P}_1$, welche je zwei Erzeugende g trifft, ist kürzestes Lot zwischen beiden. Wir bekommen also einen Bündel von eigentlichen Loten mit dem Scheitel $\mathfrak{P}_1$. Der Punkt $\mathfrak{P}_1$ ist Schnitt der g_∞ mit dem Büschel der s. Da anderseits durch $\mathfrak{P}_1$ eine Gerade s_∞ des Strahlenbüschels $\mathfrak{P}_g$ kommt, so schneidet jede Gerade durch $\mathfrak{P}_1$ an eine g auch die g_∞ und die beiden Polaren s und s_∞ der unendlich fernen Punkte dieser Geraden. Somit erhalten wir denselben Bündel nunmehr als Gesamtheit der uneigentlichen Lote durch $\mathfrak{P}_1$, so dass er in der Kongruenz doppelt zu rechnen ist.

Die eine Gruppe der uneigentlichen Lote von g_0 bildet das Strahlenbüschel ($\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{E}$). Durchläuft nun g_0 die G-Schar, so bekommen wir als Lote sämtliche Geraden der unendlich fernen Ebene.

Damit hat sich jedoch noch nicht die volle Kongruenz ergeben. Es gibt nämlich unter den Erzeugenden g eine ausgezeichnete, und zwar diejenige durch den absoluten Pol $\mathfrak{P}_g$ der g_∞; es ist die Scheitelerzeugende g_s. Die absolute Polare ihres unendlich fernen Punktes ist alsdann die g_∞ selbst. Da durch jeden Punkt der g_∞ eine absolute Polare s_∞ geht, so sind alle Geraden, welche die g_∞ und die g_s treffen, gemeinsame Lote beider. Die Gesamtheit dieser Lote ist das Strahlennetz, dessen Leitgeraden g_s und g_∞ darstellen. Wir sehen also, dass die bei dem allgemeinen Paraboloid auftretende Kongruenz (2,1) in dem vorliegenden Falle sich in den Bündel $\mathfrak{P}_1$ und ein Strahlennetz zerspaltet hat. Somit ist die Kongruenz der kürzesten Lote zwischen je zwei Geraden g des gleichseitigen Paraboloids zerfallen: 1. in den doppelten Bündel um den absoluten Pol $\mathfrak{P}_1$ der l_∞, 2. in das unendlich ferne Strahlenfeld und 3. in das Strahlennetz, dessen Leitgeraden die Scheitelerzeugende g_s und g_∞ sind.

Die Strahlen des Bündels $\mathfrak{P}_1$ kann man als eigentliche Lote auffassen. In dem allgemeinen Falle trifft jeder Strahl des Bündels zwei im Endlichen verlaufende g. Bei dem gleichseitigen Paraboloid ist eine von diesen g immer die unendlich ferne; insofern sind die Lote uneigentlich geworden. Im engsten Sinne ist nur l_s eigentliches Lot, und dieses ist ∞^2-fach.

Lebenslauf.

Ich, Albert Krusche, evangelischer Konfession, bin geboren am 31. Juli 1879 zu Gross-Biadauschke, Kreis Trebnitz, als Sohn des Gutsbesitzers Gottlieb Krusche. Ich besuchte zuerst die Schule meines Heimatsortes und danach das Kgl. Gymnasium zu Oels i. Schl. mit Einschluss seiner Vorschule von Ostern 1888 bis Michaelis 1899, wo ich es mit dem Zeugniss der Reife verliess. Von Ostern 1900 an studierte ich an der Universität Breslau Mathematik und Naturwissenschaften. Ich hörte die Vorlesungen bei den Herren Professoren:

Baumgartner, Brefeld, Ebbinghaus, Franz, Freudenthal, Hintze, Kükenthal, London, O. E. Meyer, Neumann, Pax, Rosanes, Sturm.

Ausserdem besuchte ich das Praktikum der Herren O. E. Meyer und Neumann, sowie diejenigen der Herren Kükenthal und Pax, und nahm teil an den seminaristischen Uebungen der Herren Rosanes und Sturm.

Ihnen allen sage ich meinen aufrichtigsten Dank für das Wohlwollen und die Förderung, die sie mir während meines Studiums haben zu teil werden lassen. Besonders bin ich Herrn Professor Sturm für seine gütige Unterstützung bei der Abfassung der vorliegenden Arbeit zu Dank verpflichtet.

Thesen.

1. Die darstellende Geometrie ist als die natürliche Einführung in die Geometrie der Lage zu betrachten.
2. Das gleichseitig-hyperbolische Paraboloid kann mit gleichem Recht als orthogonales Paraboloid bezeichnet werden.
3. Der Einwand Robert Grassmann's in seiner Funktionenlehre, die Bezeichnung des Differentialquotienten $\frac{d\,y}{d\,x}$ stehe im Widerspruch mit der Zahlenlehre und führe zu Trugschlüssen, ist nicht berechtigt.